

---

# ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE EL CONTROL PID CLASICO Y EL CONTROL PID FRACCIONARIO APLICADO AL SISTEMA DEL PÉNDULO INVERTIDO

---

Maher Kuzbari Mora

Trabajo De Grado Como Requisito Para Optar Por El Titulo De Ingeniero Fisico

Director: Carlos Alberto Ramires Vanegas



Universidad  
Tecnológica  
de Pereira

SEPTIEMBRE DE 2020

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
Cra.27 ##10-02 Pereira, Risaralda

## I. Resumen

En esta tesis se realiza una comparación entre el desempeño del controlador PID de orden entero y el controlador PID de orden fraccionario para controlar un sistema de un péndulo invertido. Para cada control se realiza una contextualización, construcción y sintonización respectivamente. Luego se realiza una comparación tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia y se evalúa la estabilidad de los sistemas resultantes lo cual permite la demostración de las propiedades favorables de los sistemas de control fraccionario en cuanto a la flexibilidad y robustez.

*Palabras Clave*—Péndulo Invertido, Control PID, Control PID fraccionario, Cálculo fraccionario, FOMCON toolbox.

## II. Abstract

In this thesis, a comparison is made between the performance of the integer order PID controller and the fractional order PID controller for the control of an inverted pendulum system. For each control in addition to the inverted pendulum's dynamics, a thorough theoretical contextualization is made. For the controllers, a theoretical construction and tuning is carried out. Afterwards, a comparison of the resulting systems is made both in the time domain and the frequency domain in addition to the evaluation of the stability of both systems, which allows for the demonstration of the favorable properties of fractional control systems in terms of flexibility and robustness.

*Keywords*—Inverted Pendulum, PID Control, Fractional PID Control, Fractional Calculus, FOMCON toolbox.

### III. Agradecimientos

A mi madre, por sembrar y nutrir en mí la pasión por la ciencia y el conocimiento y apostar todo por la educación.

A la familia Gadea Chamorro, por su apoyo incondicional durante el desarrollo de mi carrera que permitió su culminación.

A mi director de tesis, Carlos Alberto Ramírez Vanegas, por su confianza y tutoría.

A la Universidad Tecnológica de Pereira, por brindarme las oportunidades necesarias para desarrollarme como profesional.

## IV. Contenido

I.	Resumen .....	1
II.	Abstract .....	2
III.	Agradecimientos.....	3
VI.	Introducción.....	8
VII.	Objetivo General .....	9
VIII.	Objetivos Específicos .....	9
1.	Estado del Arte del Control PID Fraccionario y Péndulo Invertido.....	10
2.	Contexto Teórico Del Péndulo Invertido.....	11
2.1.	Definición: Oscilador armónico .....	11
2.2.	Definición: Serie de Taylor: .....	11
2.3.	Definición: Transformada de Laplace .....	12
2.4.	Péndulo Simple.....	12
2.5.	Péndulo Simple Con Amortiguación.....	18
2.6.	Péndulo Suspendido de Una Masa en Movimiento: .....	23
2.6.16.	Fricción.....	28
2.7.	Péndulo Invertido.....	30
2.7.15.	Derivación de las Ecuaciones de Movimiento Utilizando la Formulación de Lagrange.....	33
2.7.17.	Linealización de las ecuaciones de Movimiento.....	37
2.8.	Análisis del sistema en Lazo Abierto.....	39
2.8.9.	Diagramas de Bode .....	42
2.8.10.	Criterio de Estabilidad de Ubicación de Polos.....	43
3.	Control del Péndulo Invertido PID .....	49
3.2.	Razones Para Utilizar un Controlador PID .....	50
3.3.	Construcción del Controlador PID.....	52
3.4.	Construcción del controlador Utilizando Diagrama de Colocación de Polos.....	62
4.	Contextualización Sobre El Cálculo Fraccionario .....	74
4.3.	Discusión Sobre Los Operadores Del Cálculo Fraccionario .....	75
4.4.	Filtro Oustaloup .....	84
5.	Sistemas Dinámicos de Orden Fraccionario .....	84
6.	Control PID Fraccionario.....	87

6.1. Generalización de las Funciones de Control:.....	87
6.1.1. Para el Caso $\alpha \in (0, 1]$ .....	88
6.1.3. Para el Caso $\alpha \in (-1, 0]$ .....	89
Dominio.....	90
Acción Integral.....	90
Acción Derivativa.....	90
7. PID de Orden Fraccionario .....	91
8. Sintonización y Desempeño.....	93
9. Análisis de Estabilidad .....	98
10. Conclusiones.....	100
11. Referencias .....	101

## V. Tabla de Ilustraciones

Ilustración 1: Péndulo de gravedad [37] .....	12
Ilustración 2: sobre la curva sinusoidal los primero 5 sumandos de Maclaurin superpuestos....	14
Ilustración 3: La desviación entre las curvas es más pequeñas para ángulos más pequeños...15	
Ilustración 4: Grafica del movimiento oscilatorio de un péndulo con longitud 1m, y un ángulo inicial de $0.1\pi$ radianes. [12] .....	16
Ilustración 5: Diagrama de espacio de fase para péndulo simple de longitud 1m con el ángulo variando entre $-2\pi$ y $2\pi$ , se puede observar la linealidad para ángulos chiquitos cerca de 0. [12] .....	17
Ilustración 6: Grafica de movimiento en la forma de una curva exponencial para el caso de amortiguación fuerte de masa 10kg y longitud 1m con un coeficiente de amortiguación $b=100$ . [13].....	20
Ilustración 7: Grafica del espacio de fase del péndulo fuertemente amortiguado. [13] .....	21
Ilustración 8: el péndulo oscila alrededor del punto de equilibrio con un coeficiente de fricción $c=0.7$ . [13].....	22
Ilustración 9: La grafica del espacio de fase para el péndulo con amortiguación débil $c=0.7$ . La dirección de la espiral es hacia el origen, el punto de equilibrio. [13] .....	23
Ilustración 10: Diagrama del sistema acoplado con sus coordenadas vectoriales. [14] .....	24
Ilustración 11: Diagrama de sistema acoplado de péndulo invertido. Por consistencia en el documento, se utilizarán las mismas coordenadas y parámetros que el sistema pasado. [37]..	30
Ilustración 12: El diagrama de MATLAB para el sistema del péndulo invertido donde las ecuaciones de las variables de estado se encuentran en un bloque tipo función programada [16].....	35
Ilustración 13: La oscilación del péndulo (rojo) causa un desplazamiento en el carro (azul) [16]. .....	36

Ilustración 14: Durante el intervalo para $t(s) = (0: 0.05)$ se puede observar una correspondencia aproximadamente lineal entre el péndulo y el carro [17].	37
Ilustración 15: El comportamiento del péndulo invertido linealizado. [16] [17]	39
Ilustración 16: Las regiones del plano complejo de acuerdo con la estabilidad. [20]	43
Ilustración 17: Plano de fase para un sistema inestable es totalmente divergente. [20]	43
Ilustración 18: La grafica representa la respuesta de las variables de estado a un impulso el tiempo. [10]	46
Ilustración 19: Grafica de la respuesta del sistema a una excitación de tipo escalón es inestable, cumpliendo la predicción [17].	47
Ilustración 20: Diagrama de Bode para sistema sin controlador.	48
Ilustración 21: Un sistema de lazo cerrado [23]. Para el caso del péndulo invertido el input es siempre igual a 0 o $\pi$ dependiendo del marco de referencia.	49
Ilustración 22: El diagrama de bloques se puede reducir debido a que la referencia siempre es 0	50
Ilustración 23: El controlador proporcional no logra estabilizar el sistema con una ganancia de $K_p=10$ [17].	53
Ilustración 24: El controlador proporcional para el péndulo invertido con una ganancia $K_p=50$ [17].	54
Ilustración 25: Controlador Proporcional Integrador (PI) [24].	55
Ilustración 26: El controlador PI reduce el error de estado estacionario, pero el sistema sigue inestable [17].	56
Ilustración 27: la respuesta del sistema a un controlador con una ganancia proporcional diferente es más inestable y el error de estado estacionario incrementa exponencialmente [17].	57
Ilustración 28: Un diagrama de bloques para un controlador PID [23].	58
Ilustración 29: La respuesta del sistema con un control PID es estable [17].	59
Ilustración 30: Diagrama de Bode se puede apreciar la estabilidad del sistema.	60
Ilustración 31: El desplazamiento del carro en respuesta a un impulso al péndulo del sistema [17].	61
Ilustración 32: El diagrama del sistema en Simulink donde el sistema del péndulo invertido es un subsistema con una entrada y dos salidas [17].	61
Ilustración 33: El comportamiento es idéntico al sistema en MATLAB, pero en dirección contraria lo cual permite visualizar del comportamiento de ambas variables de estado simultáneamente [17].	62
Ilustración 34: El plano complejo s con una línea de razón de amortiguación [26].	63
Ilustración 35: El diagrama de Root Locus para el sistema del péndulo invertido. [17].	66
Ilustración 36: Al eliminar el cero en origen usando un integrador, los polos dominantes salen hacia el lado derecho.	67
Ilustración 37: La respuesta es satisfactoria, indicando que el sistema compensado es equivalente a asignando ganancias se aproxima al PID descrito anteriormente.	69
Ilustración 38: Un diagrama de un controlador con sistema anti-devanacion "clamping". [22]	71
Ilustración 39: Línea tangente en el origen para frecuencia igual a 1 [29]	71
Ilustración 40: Línea tangente en el origen para la frecuencia igual a 2 [29]	72

Ilustración 41: Diagrama de un filtro derivador integrado a un controlador donde $N$ es la frecuencia de corte [22].....	73
Ilustración 42: División de regiones del plano complejo según la estabilidad para un sistema de orden fraccionario [21] .....	86
Ilustración 43: Sistema controlado y con realimentación de unidad. [36].....	87
Ilustración 44: Evolución de la señal trapezoidal para valores de $\alpha \in 0,1$ .....	90
Ilustración 45: Sistema con control PID fraccionario. [39].....	91
Ilustración 46: De punto a plano, el rango del PID vs PID fraccionario [1] .....	92
Ilustración 47: Diagrama del sistema en Simulink muestra dos péndulos conectados en paralelo a una entrada impulso y control PID y PID fraccionario respectivamente.....	93
Ilustración 48: Comparación de la respuesta en frecuencia entre el sistema no compensado y el sistema compensado con PID clásico y PID fraccionario .....	98
Ilustración 49: Diagrama Root Locus del sistema pasado por un filtro Oustaloup de orden $N = 5$ .....	99



## VI. Introducción

El sistema del péndulo invertido se caracteriza por ser de orden superior, no lineal, de acoplamiento fuerte y multivariante, razón por la que ha sido estudiado por muchos investigadores y es un problema clásico en el estudio de la dinámica y la teoría de control. El péndulo invertido es ampliamente utilizado como una referencia para el ensayo de algoritmos de control ya que hay muchos sistemas utilizados en varios ámbitos que son derivados o equivalentes al modelo matemático del sistema del péndulo invertido como el sistema de guía de misiles donde el centro de masa está detrás del centro de la fuerza de arrastre, lo cual causa inestabilidad aerodinámica. Otras aplicaciones que requieren una solución de control al sistema del péndulo invertido incluyen los transportadores personales como el “hoverboard” y el Segway PT.

Dada la relevancia del sistema del péndulo invertido y la utilidad que al resulta ejercerle control pues se han hecho esfuerzos para optimizar y mejorar la efectividad del control utilizando varios métodos como PID, representación de espacio de estados, redes neuronales, control fuzzy y algoritmos genéticos.

El control fraccionario hace uso de la teoría del cálculo fraccionario la cual se refiere a la diferenciación e integración del orden de las fracciones, para la cual el orden de números enteros es un caso especial. Al incluir en sus componentes un integrador de orden fraccionario, es posible evaluar la función de error con una función que decae con una función de larga cola lo cual tiene muchas ventajas entre como la eliminación de una restricción temporal o frecuencia de resonancia para el sistema. Esto permite generalizar y mejorar sobre el desempeño de un sistema de control cuyos componentes son de orden entero. Por estas razones se considera que el control fraccionario es un método bastante prometedor en ámbitos donde los sistemas controlados sufren de problemas clásicos de sobrepaso, resonancia y otros fenómenos de difusión en el tiempo como disipación térmica o química, además de suprimir comportamientos caóticos que pueden exhibir algunos modelos matemáticos para algunos sistemas. En esta tesis el control de fraccionario es un control PID de orden fraccionario, el cual es una generalización del PID de orden entero que cuenta con un integrador fraccionario y un derivador de orden fraccionario. Esto implica que el sistema tenga más parámetros para sintonizar agregando más flexibilidad en comparación con el control PID de orden entero, pero a la vez esto lo hace más complejo de sintonizar para especificaciones exactas. Se pretende demostrar estas ventajas de una manera comparativa la cual permita resaltar el creciente interés de la comunidad académica en este tipo de sistemas.

Esta tesis consiste en un estudio detallado acerca del péndulo invertido, el control PID, el cálculo y el control fraccionarios, tomando en cuenta y elaborando sobre el contexto teórico de los conceptos relacionados para modelar el sistema del péndulo de una manera adecuada que

permita ejercer sobre el mismo un control PID para posteriormente ejercer un control PID de orden fraccionario sobre el sistema apoyándose para graficar y realizar los análisis y comparación en MATLAB y para el control fraccionario en el toolbox de FOMCON.

## VII. Objetivo General

Exponer la diferencia entre el desempeño del control PID de orden entero y el control PID de orden fraccionario en el control del sistema del péndulo invertido.

## VIII. Objetivos Específicos

1. Desarrollar una comparación entre un controlador basado en cálculo clásico y uno en cálculo fraccionario sobre el problema del péndulo invertido.
2. Definir el modelo matemático y el conjunto de restricciones que permitan una representación adecuada del problema de diseño de un controlador para un péndulo invertido.
3. Revisar las propiedades matemáticas del cálculo clásico y fraccionario del modelo desarrollado y construir un controlador basados en cada técnica para el problema propuesto.
4. Implementar el control clásico y fraccionario para resolver el problema matemático y comparar los resultados obtenidos con reportes de la literatura especializada.
5. Divulgación de los resultados en eventos académicos de carácter nacional y publicación de artículo en revista indexada.

## 1. Estado del Arte del Control PID Fraccionario y Péndulo Invertido

Desde la postulación del cálculo fraccionario en el siglo XVII hasta el siglo XX, se han hecho pocos avances en el tema de cálculo fraccionario dado que por la ausencia de una aplicación de la teoría y métodos matemáticos apropiados. Durante el siglo XIX y XX la acelerada industrialización condujo a un mayor interés y desarrollo de la teoría de control en la cual se encuentra la primera aplicación del cálculo fraccionario al buscar aumentar la robustez de un sistema ante una variación en la ganancia por parte de Bode [1] donde describe la función ideal de transferencia de un control usando exponentes de orden fraccionario. La descripción del espacio de estados de los sistemas se logró posteriormente en orden fraccionario por Caputo en 1969 [2] y Nonenmacher y Glockle en 1991 [3] entre otros. Los modelos de orden fraccionario los cuales se demostraron ser más adecuados en su descripción física, por ejemplo, para describir propiedades de memoria y hereditarias de un sistema o sustancia. Avances para el estudio de los sistemas de orden fraccionario en el dominio del tiempo se hicieron exitosamente por Oustaloup en 1988 el cual desarrolla un controlador fraccionario "CRONE" y demuestra su superioridad sobre el controlador clásico [1], luego Podlubny en 1994 [3] presenta el controlador PID fraccionario con las herramientas necesarias para analizar efectivamente un sistema de orden fraccionario entre ellas la transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler para el análisis en lazo abierto lo cual permitió la solución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario de una manera analítica aunque se limita este método, y por lo tanto el control PID de Podlubny a sistemas lineales con coeficientes constantes. Dadas estas restricciones la síntesis de un control de orden fraccionario que tome en cuenta fenómenos como la saturación condujo a que el desarrollo del control se aproveche de técnicas de numéricas y computacionales. El desarrollo de controladores PID de orden fraccionario para sistemas no lineales se logró por R. Barbosa et al. en 2007 usando tiempo discreto e interpolación de Euler y Tustin, y en 2006 por J. Cao y B. Cao utilizando la técnica de optimización de enjambre de partículas (Particle Swarm Optimization (PSO)) el cual produjo resultados satisfactorios. Otras técnicas más recientes y avanzadas incluyen el diseño de un PID fraccionario utilizando redes neuronales en 2011 por Machado y Baleanu. La mayoría de estos métodos han sido utilizados para el modelamiento del péndulo. Entre los métodos utilizados está el método de prueba y error que resulta ser útil para las condiciones dentro de las que se encuentra linealizado el sistema como por Liao et al. [4], o usando métodos numéricos como la optimización por el algoritmo de seno y coseno por el Hossainy et al. [5] y métodos de optimización computacional como el enjambre de partículas (PSO) por Mishra et al. [6] y de inteligencia artificial usando redes neuronales por Ramirez et al. [7].

## 2. Contexto Teórico Del Péndulo Invertido

En esta sección se aborda la descripción física del sistema que se desea controlar, empezando por el contexto matemático del tipo de sistema según su respuesta a un estímulo, y luego tomando casos sucesivamente construyendo los conceptos y las herramientas matemáticas hasta llegar al sistema del péndulo invertido, por lo tanto, el contenido se organiza de la siguiente manera:

- i. Concepto: Oscilador armónico simple
- ii. Modelo: Péndulo simple
- iii. Modelo: Péndulo simple con amortiguación
- iv. Modelo: Péndulo en movimiento
- v. Modelo: Péndulo invertido en movimiento

### 2.1. Definición: Oscilador armónico

Un oscilador armónico es un sistema que es sujeto a una fuerza restauradora  $\vec{F}$  cuando es desplazado de su punto de equilibrio, la cual es proporcional a la distancia  $\vec{x}$  de ese punto de tal manera que [8]:

Ecuación ley de Hooke: 
$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad .2.1.1$$

Donde  $k$  es una constante positiva.

Cuando  $F$  es la única fuerza actuando sobre el sistema, el sistema se denomina un oscilador armónico simple. Este al ser desplazado de su posición de equilibrio es decir su condición inicial no es en equilibrio (no se toma en cuenta la fuerza que lo desplazo), oscilara alrededor de su punto de equilibrio con un periodo y amplitud constantes salvo a que haya una fuerza de fricción (amortiguadora) la cual es proporcional a la velocidad del sistema.

### 2.2. Definición: Serie de Taylor:

La serie de Taylor es una función que tiene la forma de un polinomio con infinitos sumandos. En su esencia, la serie de Taylor es un método numérico que busca expresar una función compleja  $f(x)$  de la forma de un polinomio  $P(x)$  el cual es más sencillo buscando poder tener un manejo más práctico de la función [9].

Para  $f(x)$  la serie de Taylor es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n \quad .2.2.1$$

Donde  $a$  es el punto alrededor del cual se hace la aproximación. Para  $a = 0$  tenemos la serie de Mclaurin la cual es útil para linealizar funciones trigonométricas.

### 2.3. Definición: Transformada de Laplace

La transformada de Laplace tiene como función tomar una función  $f(t)$  donde usualmente  $t$  es una variable que representa el tiempo, y da como resultado una función  $F(s)$  donde  $s$  es una variable compleja. Esto es útil para la representación de fenómenos cuyo modelo matemático involucra funciones exponenciales y sinusoidales las cuales al operarse pueden pasar de una forma diferencial a una forma algebraica [10].

La transformada de Laplace para una función  $f(t)$  es [10]:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad .2.3.1$$

Donde la variable  $s = \sigma + i\omega$  y  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ . Si la función transformada es una función derivada de orden  $n \in \mathbb{N}$  entonces la transformada de Laplace es [11]:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0) \quad .2.3.2$$

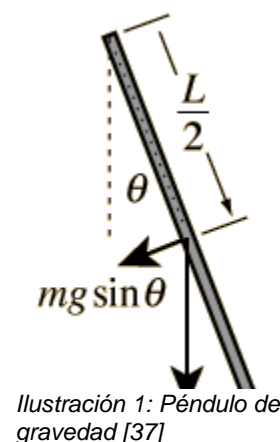
Por lo tanto, se puede deducir que para una función integral de orden  $n \in \mathbb{N}$  la transformada de Laplace sería [11]:

$$\mathcal{L}\left\{\int \int \int \dots \int f(t)\right\} = s^{-n} F(s) \quad .2.3.3$$

### 2.4. Péndulo Simple

El péndulo simple consiste en una varilla sujeta en la extremidad superior en un punto  $p$  y tiene las siguientes características como en la ilustración:

- Longitud  $\ell$
- Masa  $m$ , con centro de masa en  $\frac{\ell}{2}$
- Momento de inercia  $I = \frac{1}{3} m \ell^2$
- Angulo con respecto al punto de equilibrio  $\theta$  que se incrementa en sentido antihorario.
- Un torque  $\tau$  alrededor del eje de rotación  $\tau = \vec{R} \times \vec{F}$  también  $\tau = r \vec{F} \sin \theta(t)$ .



- Una aceleración angular en algún momento  $t$  igual a  $\alpha = \ddot{\theta} = \frac{\tau}{I}$

Además, el sistema cumple con las siguientes condiciones iniciales [8]:

- $\theta(0) = 0$  (c1)

- $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$  (c2)

Se puede deducir la aceleración de la varilla alrededor del eje de rotación reemplazando  $\tau$  y  $I$  en la ecuación de  $\alpha$  (aceleración angular).

El torque que actúa sobre la varilla en un sentido horario luego de ser desplazada del punto de equilibrio en un sentido antihorario, de tal manera que (tomando en cuenta la distancia del eje al centro de masa igual a  $\vec{R}$ ) [8]:

$$\vec{\tau} = -mg \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin \theta(t) \quad .2.4.1$$

$$\therefore \ddot{\theta}(t) = \frac{-mg \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin \theta(t)}{\frac{1}{3} m \ell^2} \quad .2.4.2$$

$$\therefore \ddot{\theta}(t) = \frac{-g}{\ell} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sin \theta(t) \quad .2.4.3$$

En la expresión de  $\alpha$  tenemos los términos constantes:  $\frac{-g}{\ell} \cdot \frac{3}{2}$ , definimos  $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \cdot \frac{3}{2}$ , como la frecuencia angular para obtener la ecuación [8]:

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2 \cdot \sin \theta(t) \quad .2.4.4$$

Esta es una ecuación parcial de segundo orden no lineal, la cual no tiene una solución analítica. Para poder resolver el sistema y obtener las ecuaciones de estado, se hace la aproximación de usando la serie de Maclaurin:

Igualando 2.2.1 con  $\sin \theta$  [9]:

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (\theta)^n \quad .2.4.5$$

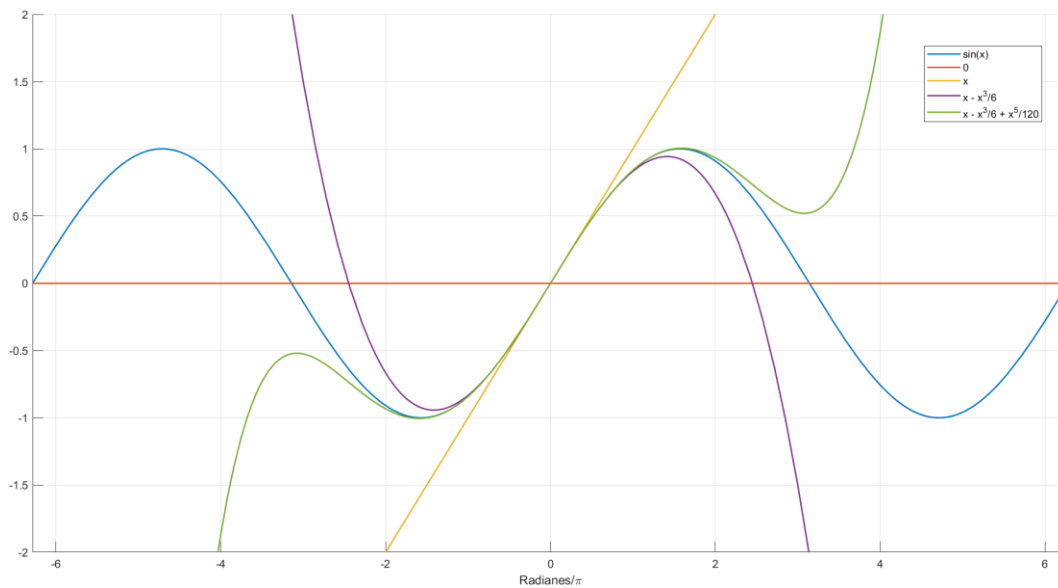
Serie de Maclaurin de  $\sin \theta$  [9]:

$$\therefore \sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad .2.4.6$$

La función  $\sin \theta$  linealizada [8, 9]:

$$\therefore \sin \theta(t) \cong \theta(t) \quad .2.4.7$$

La aproximación es válida para  $\sin \theta$  (el error es menos de 1%), si el ángulo de desplazamiento es pequeño. Entre  $0^\circ$  y  $14^\circ$  [9]. Se puede apreciar la exactitud de la aproximación visualmente graficando los polinomios de Maclaurin para  $\sin x$  sobre una curva  $\sin x$ :



*Ilustración 2: sobre la curva sinusoidal los primero 5 sumandos de Maclaurin superpuestos*

Para ángulos muy pequeños la diferencia es imperceptible:

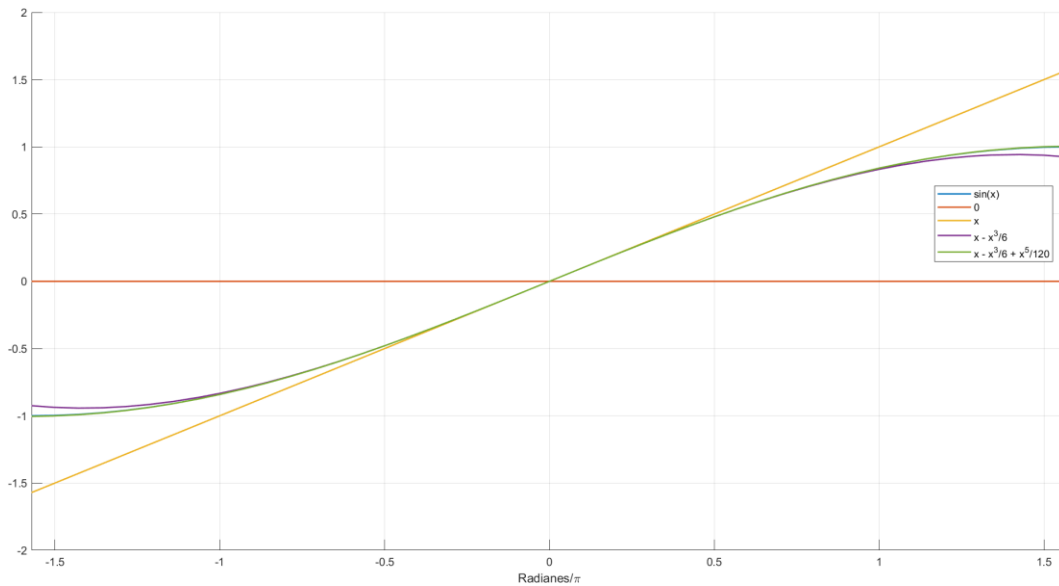


Ilustración 3: La desviación entre las curvas es más pequeña para ángulos más pequeños.

Ahora la ecuación de  $\alpha$  es [8]:

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2 \cdot \theta(t) \quad .2.4.8$$

Esta ecuación si tiene una solución analítica, la cual es comprobamos que es válida por el teorema de unicidad de Picard-Lindelof el cual dice que si una solución a una ecuación diferencial satisface las condiciones iniciales de la ecuación y además tiene el mismo número de coeficientes arbitrarios (en este caso es uno,  $\omega_0^2$ ) entonces esta es la única solución a la ecuación diferencial [8]:

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad .2.4.9$$

$$\dot{\theta}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad .2.4.10$$

$$\ddot{\theta}(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad .2.4.11$$

Se puede hacer la siguiente observación, despejando  $t = 0$  en las ecuaciones (tomando en cuenta las condiciones iniciales  $\theta(0) = 0$ ):

$$\text{Evaluando (c1) en (11):} \quad \theta(0) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad .2.4.12$$

$$\therefore \theta(0) = A \cos \phi \quad .2.4.13$$

$$\therefore \phi = \frac{\pi}{2}$$

En  $t = 0$ , además [8]:



$$\cos \phi = \sin \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right)$$

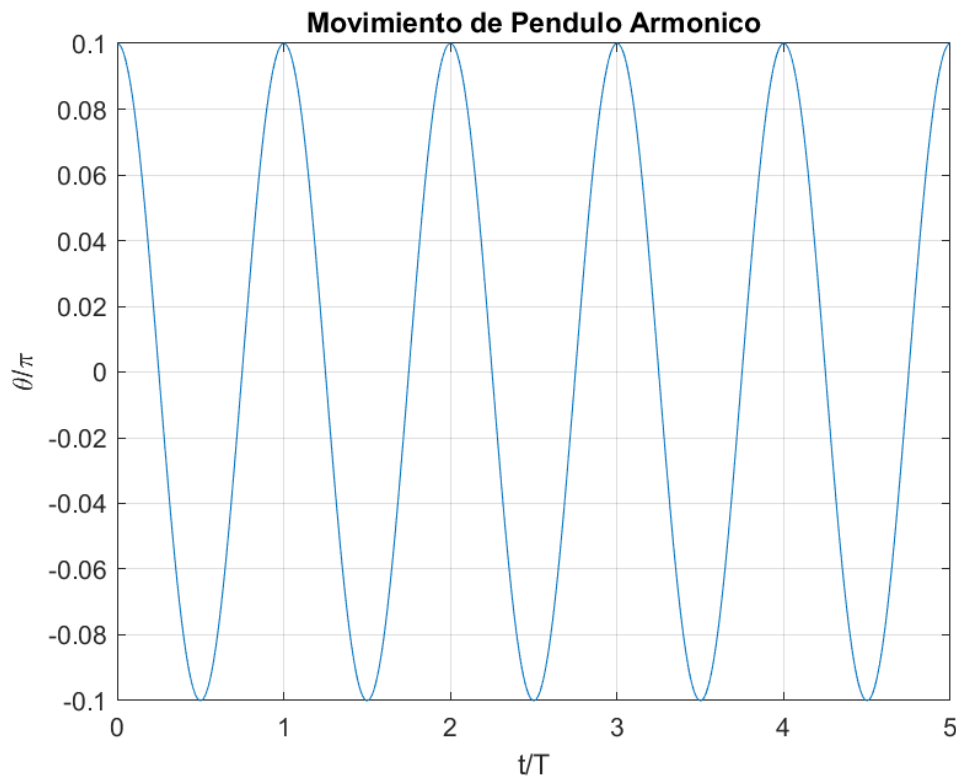
$$\therefore \dot{\theta}(0) = -A\omega_0 \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \dot{\theta}(0) = -A\omega_0$$

$$\therefore A = -\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}$$

$$\therefore \theta(t) = -\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad .2.4.14$$

El movimiento resultante de este péndulo es una curva sinusoidal:



*Ilustración 4: Grafica del movimiento oscilatorio de un péndulo con longitud 1m, y un ángulo inicial de  $0.1\pi$  radianes. [12]*

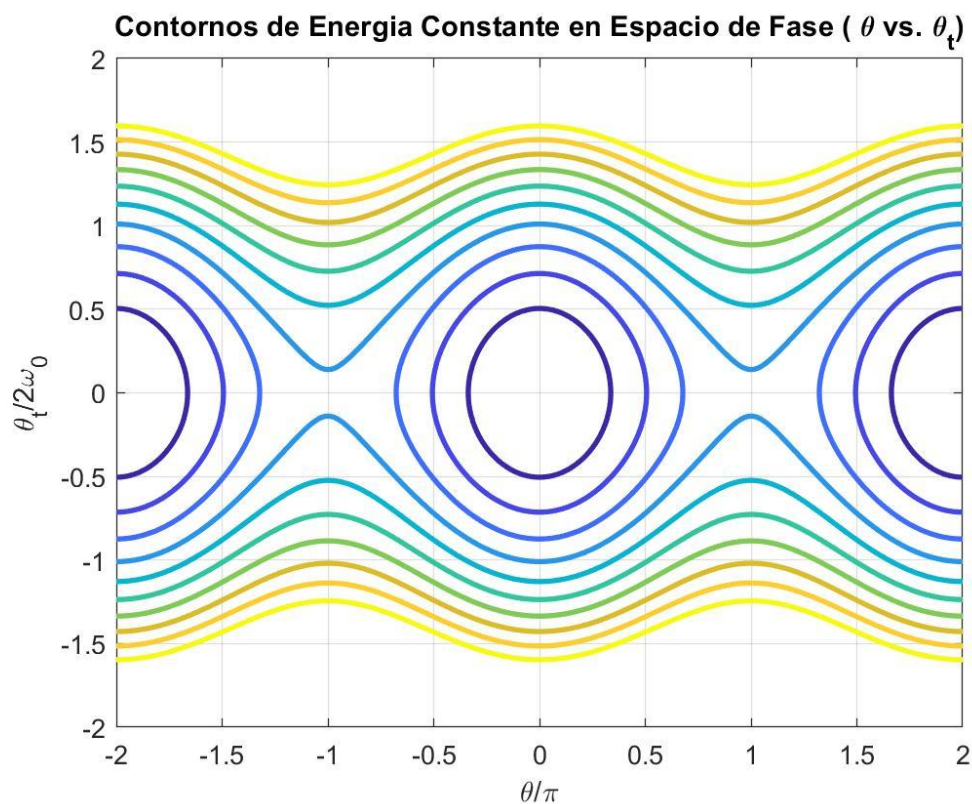
El periodo es el inverso de la frecuencia es el periodo donde  $f = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega}$  [8]

$$f = \frac{\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}}{2\pi}$$

$$\rightarrow \frac{1}{f} = T$$

$$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}} \quad .2.4.15$$

El diagrama de fase graficado con la energía del sistema en función del ángulo  $\theta$  permite visualizar el comportamiento no lineal del péndulo sustentando la necesidad de la linealización:



*Ilustración 5: Diagrama de espacio de fase para péndulo simple de longitud 1m con el ángulo variando entre  $-2\pi$  y  $2\pi$ , se puede observar la linealidad para ángulos pequeños cerca de 0. [12]*

## 2.5. Péndulo Simple Con Amortiguación

Al sistema anterior se le agrega una amortiguación, con las mismas condiciones iniciales. Esta amortiguación toma la forma de un torque que es inversamente proporcional a la velocidad angular [8]:

$$\vec{\tau}_D = -b \dot{\theta}(t)$$

Haciendo la misma aproximación:  $\theta(t) \cong \theta$ , agregamos el factor de amortiguación a la ecuación de  $\alpha$  [8]:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}(t) &= \frac{\vec{\tau}_g + \vec{\tau}_D}{I} \\ \therefore \ddot{\theta}(t) &= \frac{-mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \theta(t) - b\dot{\theta}(t)}{\frac{1}{3}m\ell^2} \\ \therefore \ddot{\theta}(t) &= \frac{-mg \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin \theta(t)}{\frac{1}{3}m\ell^2} - \frac{b\dot{\theta}(t)}{\frac{1}{3}m\ell^2} \\ \therefore \ddot{\theta}(t) &= \frac{-g}{\ell} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sin \theta(t) - \frac{b}{\frac{1}{3}m\ell^2} \dot{\theta}(t) \quad .2.5.1\end{aligned}$$

Designamos  $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \cdot \frac{3}{2}$  y  $\gamma = \frac{b}{I}$  en 2.4.1 para obtener [8]:

$$\therefore \ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2 \sin \theta(t) - \gamma \dot{\theta}(t) \quad .2.5.2$$

Tomando en cuenta la aproximación  $\sin \theta(t) \cong \theta(t)$  [8]:

$$\therefore \ddot{\theta}(t) + \gamma \dot{\theta}(t) + \omega_0^2 \theta(t) = 0$$

La solución para esta ecuación depende de las dos constantes  $\gamma$  y  $\omega$ . Existen tres casos que se pueden distinguir [8]:

1.  $\gamma^2 > 4\omega_0^2 \rightarrow$  Amortiguamiento Fuerte: el sistema no oscila.
2.  $\gamma^2 < 4\omega_0^2 \rightarrow$  Amortiguamiento Débil: el sistema oscila.

3.  $\gamma^2 = 4\omega_0^2 \rightarrow$  Amortiguamiento Critico: el sistema retorna al equilibrio en el tiempo mínimo.

En el caso 1, la solución para la ecuación de movimiento se puede sustentar con el teorema de unicidad si cumple con el número de coeficientes arbitrarios y las condiciones iniciales del sistema es [8]:

$$\theta(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t} \quad .2.5.3$$

Evaluando en  $t = 0$  se puede deducir que:

$$\theta(0) = A + B$$

$$\therefore A = -B$$

Donde [8]:

$$\alpha_1 = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

Si derivamos la solución para obtener  $A$  en términos de  $\dot{\theta}$ :

$$\dot{\theta}(t) = -\alpha_1 Ae^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 Be^{-\alpha_2 t}$$

$$\therefore \dot{\theta}(0) = -\alpha_1 A - \alpha_2 B$$

$$A = -B \therefore \dot{\theta}(0) = -\alpha_1 A + \alpha_2 A$$

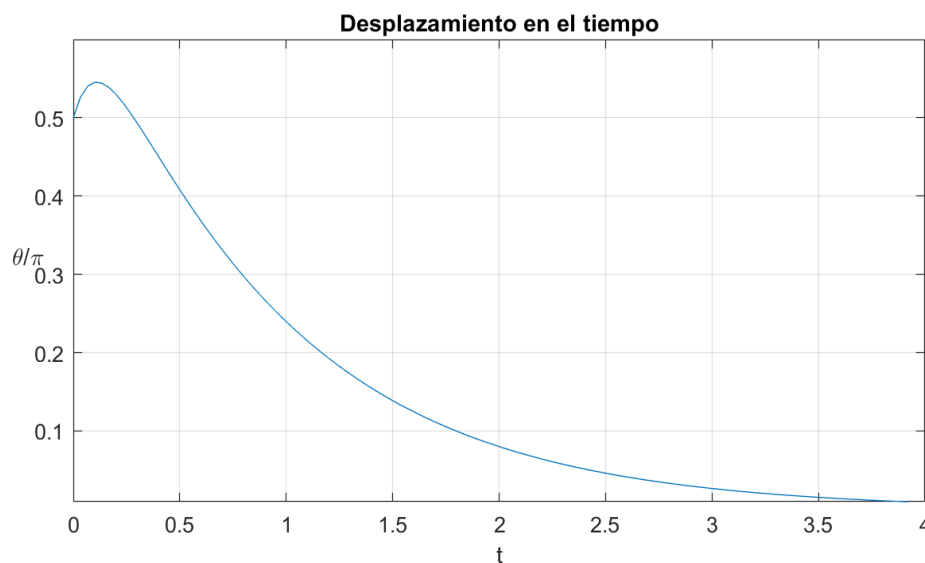
$$\therefore \dot{\theta}(0) = A(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\therefore A = \frac{\dot{\theta}_0}{(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

Se reemplaza a  $A$  en la ecuación de  $\theta(t)$  [8]:

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}) \quad .2.5.4$$

La ecuación para el desplazamiento en el tiempo es de una suma de exponenciales de potencias negativas, por lo tanto, el movimiento no es oscilatorio como en la ilustración [13]:



*Ilustración 6: Grafica de movimiento en la forma de una curva exponencial para el caso de amortiguación fuerte de masa 10kg y longitud 1m con un coeficiente de amortiguación  $b=100$ . [13]*

Es importante tener en cuenta que, en el caso de amortiguamiento fuerte, un péndulo ideal no retornara a su posición de equilibrio ya que  $\theta(t) = 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . También se puede observar que el grafico del espacio de fase se aproxima al origen (punto de equilibrio) sin dar vueltas alrededor del mismo [13]:

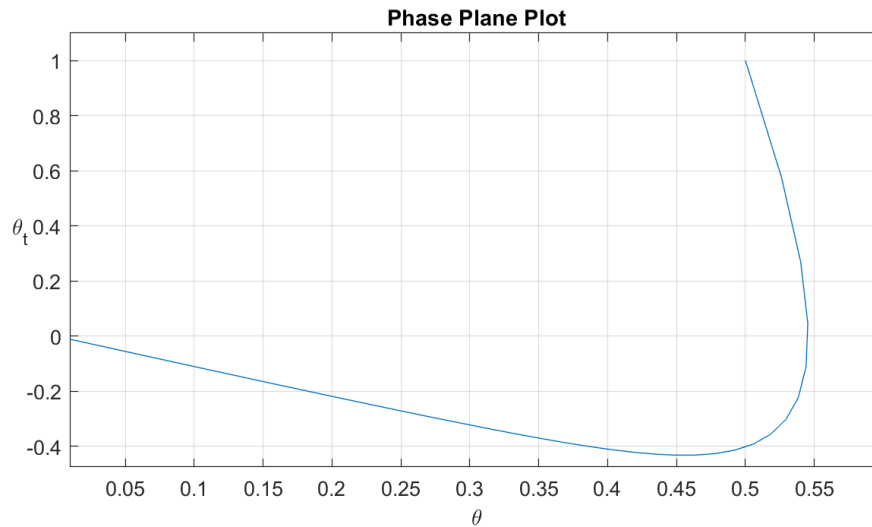


Ilustración 7: Grafica del espacio de fase del péndulo fuertemente amortiguado. [13]

Esta ecuación es una suma de exponenciales la cual no tiene un comportamiento oscilatorio y tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para el segundo caso, donde  $\gamma^2 < 4\omega_0^2$ , existe una solución diferente que se invoca también utilizando el teorema de unicidad [8]:

$$\theta(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega' t + \phi) \quad .2.5.5$$

Donde  $\omega'$  es una frecuencia amortiguada, resulta de la suma de las magnitudes de la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$  y la amortiguación  $\gamma$  [8]:

$$\omega' \equiv \sqrt{\frac{4\omega_0^2 - \gamma^2}{2}}$$

La derivada de la solución es [8]:

$$\dot{\theta}(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ \omega' \sin(\omega' t + \phi) - \frac{\gamma}{2} \cos(\omega' t + \phi) \right]$$

Ahora se pueden evaluar las condiciones iniciales:

$$\theta(0) = 0$$

$$\therefore \theta(0) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega' t + \phi) = 0$$

$$\therefore \theta(0) = A \cos \phi = 0 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

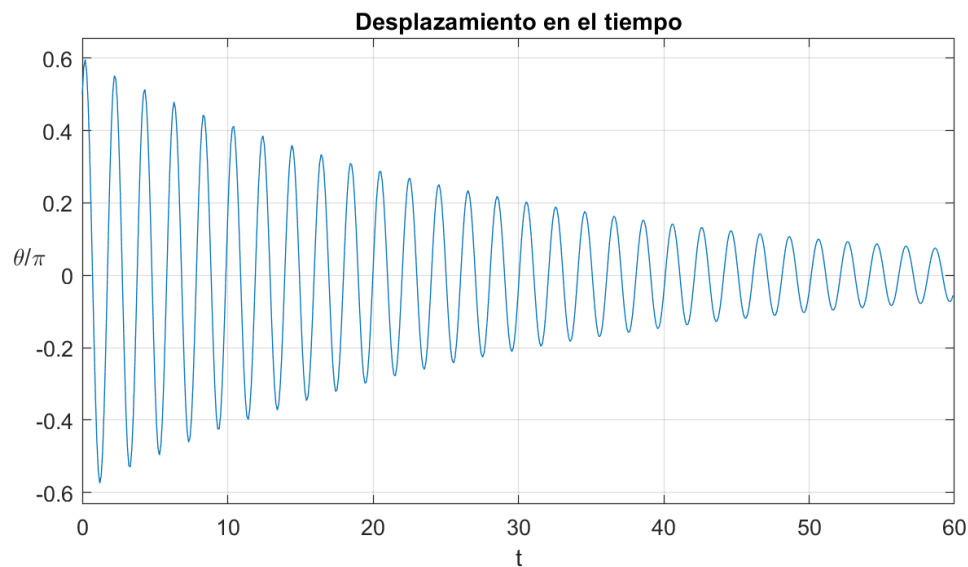
$$\therefore \dot{\theta}(0) = -A\omega' \rightarrow A = -\frac{\dot{\theta}_0}{\omega'}$$

$$\therefore \theta(t) = -\frac{\dot{\theta}_0}{\omega'} \cos\left(\omega' t + \frac{\pi}{2}\right)$$

2.4.4 es igual a 2.4.5  
tomando en cuenta (c1) [8]:

$$\therefore \theta(t) = -\frac{\dot{\theta}_0}{\omega'} \sin \omega' t \quad .2.5.6$$

La ecuación resultante es una ecuación de una curva sinusoidal para el ángulo  $\theta$  en el tiempo, es decir que el desplazamiento angular es sinusoidal, oscilando alrededor del punto de equilibrio  $\theta(t) = 0$  como podemos observar en la ilustración [13]:



*Ilustración 8: el péndulo oscila alrededor del punto de equilibrio con un coeficiente de fricción  $c=0.7$ . [13]*

Su diagrama de fase es asintóticamente convergente hacia el origen [13]:

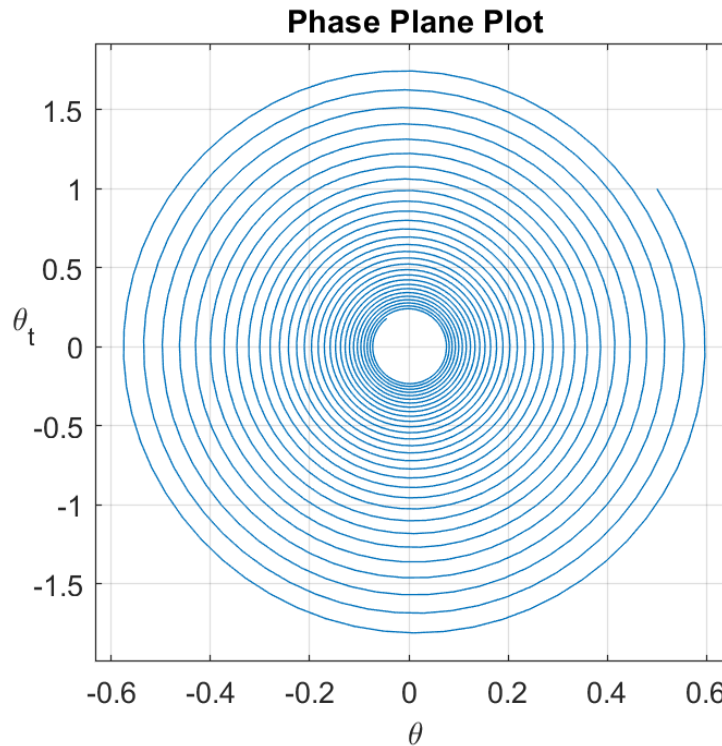


Ilustración 9: La grafica del espacio de fase para el péndulo con amortiguación débil  $c=0.7$ . La dirección de la espiral es hacia el origen, el punto de equilibrio. [13]

Una observación que se puede hacer es que el ángulo  $\phi$  puede tomar valores diferentes a  $\frac{\pi}{2}$  para satisfacer las condiciones iniciales, según la relación [8]:

$$\phi = n\pi - \frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{N} \quad .2.5.7$$

Cuando  $n$  es par, aparece un segundo punto de equilibrio el cual es inestable.

### 2.6. Péndulo Suspendido de Una Masa en Movimiento:

En este caso se considerará un carro de masa  $m_1$  sobre un riel horizontal, que confina su movimiento a una dimensión. Desde el centro de la masa del carro se suspende un péndulo cuya masa  $m_2$  está concentrada en su totalidad en el extremo inferior del péndulo cuya longitud es  $\ell$ .

Para mayor simplicidad, establecemos dos marcos de referencia: uno para el carro  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  cuyas coordenadas son horizontal, vertical y alto respectivamente. y otra segunda para el péndulo  $(\hat{e}, \hat{n})$  cuyas coordenadas son radial (centrípeto) y tangencial respectivamente y  $\vec{P}_1$  es



el vector del origen al centro de masa del carro y  $\vec{p}_2$  es el vector del centro de masa del carro a la masa  $m_2$ .

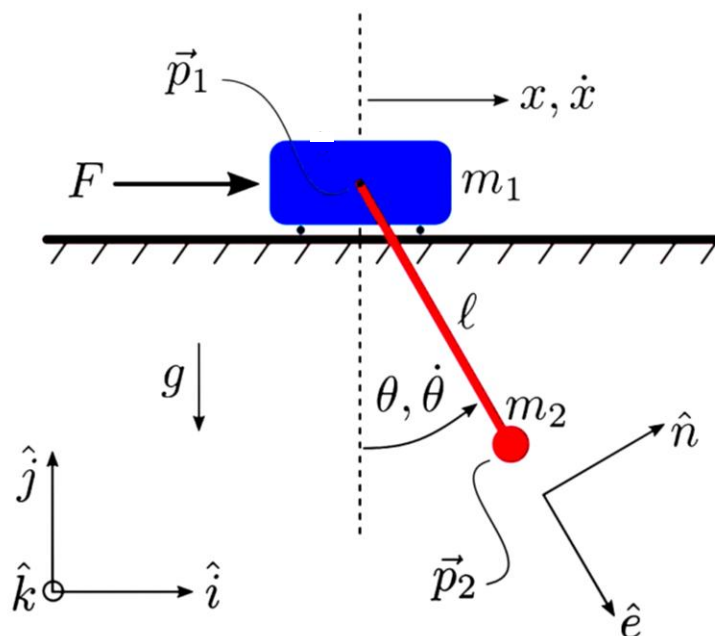


Ilustración 10: Diagrama del sistema acoplado con sus coordenadas vectoriales. [14]

Usando la segunda ley de Newton, tenemos la equivalencia de las fuerzas sobre el carro [14]:

$$(F - T \sin \theta)\hat{i} + (N - W_1 - T \cos \theta)\hat{j} = m_1\ddot{\vec{p}}_1 \quad .2.6.1$$

La fuerza  $N$  y  $W$  son fuerzas conservativas (invariantes en el tiempo) con respecto al carro y consecuentemente el sistema puede ser descrito matemáticamente de una manera equivalente expresarse sin esas fuerzas.

Las fuerzas sobre el péndulo [14]:

$$(T \sin \theta)\hat{i} + (T \cos \theta - W_2)\hat{j} = m_2\ddot{\vec{p}}_2 \quad .2.6.2$$

Las fuerzas que actúan sobre el péndulo también se pueden expresar en términos de torques sobre el pivote [14]:

$$(\vec{\mathcal{P}}_2 - \vec{\mathcal{P}}_1) \times (-W_2 \hat{j}) = (\vec{\mathcal{P}}_2 - \vec{\mathcal{P}}_1) \times (m_2 \ddot{\vec{\mathcal{P}}}_2) \quad .2.6.3$$

**Cinemática:** Los vectores de posición tienen las expresiones equivalentes en términos de vectores unitarios que son necesario despejar para reemplazar en las ecuaciones 2.5.1 y 2.5.1 [14]:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}_1 &= x\hat{i} & \vec{\mathcal{P}}_2 &= \vec{\mathcal{P}}_1 + \ell\hat{e} & \therefore \vec{\mathcal{P}}_2 &= x\hat{i} + \ell\hat{e} \\ \dot{\vec{\mathcal{P}}}_1 &= \dot{x}\hat{i} & \dot{\vec{\mathcal{P}}}_2 &= \dot{\vec{\mathcal{P}}}_1 + \ell\dot{\hat{e}} & \therefore \dot{\vec{\mathcal{P}}}_2 &= \dot{x}\hat{i} + \ell\dot{\hat{e}} \\ \ddot{\vec{\mathcal{P}}}_1 &= \ddot{x}\hat{i} & \ddot{\vec{\mathcal{P}}}_2 &= \ddot{\vec{\mathcal{P}}}_1 + \ell\ddot{\hat{e}} & \therefore \ddot{\vec{\mathcal{P}}}_2 &= \ddot{x}\hat{i} + \ell\ddot{\hat{e}} \end{aligned}$$

Es necesario pasar los vectores unitarios del péndulo a coordenadas rectangulares tomando en cuenta que la posición de equilibrio es  $\theta = 0$  y las condiciones iniciales:  $\theta = 0 \rightarrow \hat{e} = -\hat{j}$ ;  $\hat{n} = \hat{i}$  [14] para que ambos marcos de referencia sean equivalentes:

$$\hat{e} = \sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}$$

$$\hat{n} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

$$\dot{\hat{e}} = \dot{\theta} \cos \theta \hat{i} + \dot{\theta} \sin \theta \hat{j} = \dot{\theta} \hat{n}$$

$$\dot{\hat{n}} = -\dot{\theta} \sin \theta \hat{i} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{j} = -\dot{\theta} \hat{e}$$

$$\ddot{\hat{e}} = \ddot{\theta} \hat{n} - \dot{\theta}^2 \hat{e}$$

$$\therefore \ddot{\hat{e}} = \ddot{\theta}(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) - \dot{\theta}^2(\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) \quad .2.6.4$$

$$\ddot{\hat{n}} = \ddot{\theta} \hat{e} - \dot{\theta}^2 \hat{n}$$

$$\therefore \ddot{\hat{n}} = \ddot{\theta}(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) - \dot{\theta}^2(\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) \quad .2.6.5$$

Ahora se puede sustituir en las ecuaciones cinemáticas las componentes de rotación por sus equivalentes rectangulares.

Con respecto al carro, está establecido que su movimiento este confinado en la dirección  $\pm \hat{i}$ . Esto significa que la ecuación cinemática queda únicamente en términos de  $\hat{i}$  esta ecuación es hallada tomando el producto punto de 2.5.1 con  $\hat{i}$  [14]:

$$\left[ F - T \sin \theta = \ddot{\vec{P}}_1 m_1 \right] \hat{i}$$

$$F = \ddot{x} m_1 + T \sin \theta \quad .2.6.6$$

Mientras que el carro solo se mueve en una dimensión ya que las fuerzas verticales (en dirección  $\hat{j}$ ) son conservativas, el péndulo tiene un movimiento en dos dimensiones ya que la aceleración del carro ocasiona un toque sobre el pivote del péndulo. Se toma el producto punto de la ecuación de 2.5.2 del movimiento del péndulo con respecto a  $\hat{i}$  y luego  $\hat{j}$  reemplazando las aceleraciones tangenciales y centrípetas con 2.5.4 y 2.5.5 respectivamente [14]:

En dirección  $\hat{i}$ :

$$(T \sin \theta \hat{i}) \hat{i} = m_2 \ddot{\vec{P}}_2 \hat{i}$$

$$\therefore T \sin \theta = m_2 \left( \ddot{x} \hat{i} + \ell \left( \ddot{\theta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) - \dot{\theta}^2 (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) \right) \right) \hat{i}$$

$$\therefore T \sin \theta = m_2 \ddot{x} + m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad .2.6.7$$

En dirección  $\hat{j}$ :

$$(T \sin \theta \hat{i}) \hat{j} + ((T \cos \theta - W_2) \hat{j}) \hat{j} = m_2 \ddot{\vec{P}}_2 \hat{j}$$

$$W_2 = m_2 g$$

$$\therefore T \cos \theta - m_2 g = m_2 \left( \ddot{x} \hat{i} + \ell \left( \ddot{\theta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) - \dot{\theta}^2 (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) \right) \right) \hat{j}$$

$$\therefore T \cos \theta - m_2 g = m_2 \ell \ddot{\theta} \sin \theta + m_2 \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta \quad .2.6.8$$

Adicionalmente, la ecuación de torques alrededor del pivote tiene componentes diferentes a cero únicamente en la dirección  $\hat{k}$ , por lo tanto, tomando el producto punto de 2.5.3 con respecto a  $\hat{k}$  (eliminando la componente en la ecuación), arroja una ecuación útil ya contiene ambas aceleraciones  $\ddot{x}, \ddot{\theta}$  [14]:

$$\hat{k} \cdot \left\{ (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \times (-W_2 \hat{j}) \right\} = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \times (m_2 \ddot{\vec{P}}_2)$$

$$\rightarrow \hat{k} \cdot \left\{ (\ell \hat{e}) \times (-m_2 g \hat{j}) \right\} = (\ell \hat{e}) \times (m_2 (\ddot{x} \hat{i} + \ell \ddot{\theta}))$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \hat{k} \cdot \left\{ (\ell \cdot (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j})) \times (-m_2 g \hat{j}) \right. \\ = (\ell \cdot (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j})) \\ \times \left( m_2 \left( \ddot{x} \hat{i} + \ell \left( \ddot{\theta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) - \dot{\theta}^2 (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) \right) \right) \right) \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \hat{k} \cdot \left\{ -m_2 g \ell \sin \theta \cdot \hat{k} \right. \\ = m_2 \ell \left( (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) \right. \\ \times \left( \ddot{x} \hat{i} + \ell \ddot{\theta} \cos \theta \hat{i} + \ell \ddot{\theta} \sin \theta \hat{j} - \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \hat{i} + \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta \hat{j} \right) \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \hat{k} \cdot \left\{ -m_2 g \ell \sin \theta \cdot \hat{k} \right. \\ = m_2 \ell (\ell \ddot{\theta} \sin^2 \theta \cdot \hat{k} + \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \hat{k} + \ddot{x} \cos \theta \cdot \hat{k} + \ell \ddot{\theta} \cos^2 \theta \cdot \hat{k} - \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \cdot \cos \theta \cdot \hat{k}) \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \hat{k} \cdot \left\{ -m_2 g \ell \sin \theta \cdot \hat{k} = m_2 \ell (\ddot{x} \cos \theta + \ell \ddot{\theta}) \cdot \hat{k} \right\}$$

$$\rightarrow -m_2 g \ell \sin \theta = m_2 \ell \ddot{x} \cos \theta + m_2 \ell^2 \ddot{\theta} \quad .2.6.9$$

$$\therefore -g \sin \theta = \ddot{x} \cos \theta + \ell \ddot{\theta} \quad .2.6.10$$

Tenemos 3 ecuaciones de estado con 5 variables. Se puede usar la siguiente sustitución para eliminar las dos variables de tensión, ya que son prescindibles para este sistema:

Resolviendo para la tensión en  $x$  de la ecuación 2.5.1 [14]:

$$F - T \sin \theta = m_1 \ddot{x}$$

$$\therefore T \sin \theta = F - m_1 \ddot{x} \quad .2.6.11$$

Se sustituye en la ecuación 2.5.7 del péndulo del componente horizontal:

$$T \sin \theta = m_2 \ddot{x} + m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$\therefore F - m_1 \ddot{x} = m_2 \ddot{x} + m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$\therefore F = (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad .2.6.12$$

La solución para la aceleración lineal es [15]:

$$\begin{array}{l} \text{De la ecuación} \\ 2.5.12 \end{array} \quad \ddot{x} = \frac{F - m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta + m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta}{(m_1 + m_2)} \quad .2.6.13$$

Y para la aceleración angular:

$$\begin{array}{l} \text{De la ecuación} \\ 2.5.8 \end{array} \quad \ddot{\theta} = \frac{f - (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta}{m_2 \ell \cos \theta} \quad .2.6.14$$

Pero esta ecuación tiene el inconveniente que no es definida para  $\cos \theta = 0$ . Se puede encontrar la aceleración angular en términos del torque alrededor del pivote con un momento de inercia  $I = 0$  [15]:

$$\begin{array}{l} \text{De la ecuación} \\ 2.5.10 \end{array} \quad \ddot{\theta} = \frac{-\ddot{x} \cos \theta - g \sin \theta}{\ell} \quad .2.6.15$$

#### 2.6.16. Fricción

Las fuentes de fricción más significativas para este sistema son [15]:

- i. Fricción del carro con el riel.
- ii. Fricción del péndulo en el punto de articulación.
- iii. Fricción del péndulo con el aire.

La Implementación de la fricción al sistema se hará usando aproximaciones para cada uno de los casos. Los casos 2.5.1.2 y 2.5.1.3 se pueden combinar ya que en ambos casos la aproximación para las fuerzas de fricción de aire y del punto de articulación son proporcionales a la velocidad angular del péndulo.

Para la fricción entre el carro y el riel:

- Se asume que la velocidad angular  $\dot{\theta}$  siempre es muy pequeña.
- Se asume que la masa del péndulo  $m_1 \ll m_2$ .

Se puede hacer la siguiente aproximación para la fricción [15]:

$$F_f = -\mu_1 m_1 g \operatorname{sgn}(\dot{x})$$

Para movimiento oscilatorios, la función  $\text{sgn}(\dot{x})$  exhibe una discontinuidad  $\dot{x} = 0$ . Esto puede causar que el control del sistema no funcione correctamente. Una aproximación más útil sería asumir que  $\mu_1$  también toma en cuenta la fricción asociada con la resistencia del aire [15]:

$$F_f = -\mu_1 \dot{x} \quad .2.6.17$$

Si se toma la articulación como una balinera lubricada, la fricción puede ser aproximada al momento:

$$I_f = \mu_2 |N_2| \cdot \text{sgn}(\dot{\theta})$$

Aparece el mismo inconveniente con la función signo de  $x$ , por lo tanto, dado a que para el uso particular del modelo y sus condiciones de operación en las cuales la desviación del ángulo  $\theta$  de la vertical es muy pequeño y por lo tanto resulta conveniente la siguiente aproximación. Se toma el coeficiente  $\mu_2$  la cual es proporcional a la velocidad angular del péndulo la cual también puede incorporar la fricción asociada con la resistencia del aire [15]:

$$M_f = \mu_2 \dot{\theta} \quad .2.6.18$$

Ahora se extienden las ecuaciones 2.5.13 y 2.5.15 para obtener la fricción [15]:

$$\ddot{x} = \frac{F - m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta + m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - \mu_1 \dot{x}}{(m_1 + m_2)} \quad .2.6.19$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-\ddot{x} \cos \theta - g \sin \theta - \frac{\mu_2 \dot{\theta}}{m_2 \ell}}{\ell} \quad .2.6.20$$

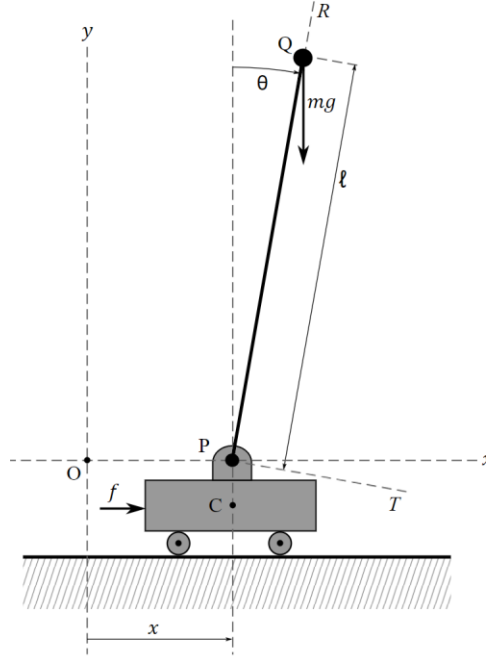
El sistema se puede describir de forma matricial de la manera [14] [15]:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \ell \\ m_1 + m_2 & m_2 \ell \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \theta + \frac{\mu_2 \dot{\theta}}{m_2 \ell} \\ F + m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - \mu_1 \dot{x} \end{bmatrix} \quad .2.6.21$$

Es un sistema no lineal para dos ecuaciones lineales de segundo orden, para emplear el método de control PID es necesario linealizar el sistema. En esta tesis se realiza el control para el péndulo invertido y por lo tanto ese sistema se linealiza en la sección siguiente.

## 2.7. Péndulo Invertido

Usando los mismos marcos de referencia rectangulares y rotando el marco de referencia  $180^\circ$  en dirección horaria, se puede modelar el péndulo invertido tomando en cuenta que ahora el sistema es inherentemente inestable alrededor de  $\theta(0) = 0$  (para algunas referencias  $\theta(0) = \pi$ )



*Ilustración 11: Diagrama de sistema acoplado de péndulo invertido. Por consistencia en el documento, se utilizarán las mismas coordenadas y parámetros que el sistema pasado. [37]*

Usando la segunda ley de Newton y el principio de D'Alembert, tenemos la equivalencia de las fuerzas sobre el carro en dirección  $\hat{i}$  [16] [14]:

$$F - T \sin \theta = m_1 \ddot{x}$$

$$\therefore F = \ddot{x}m_1 + T \sin \theta \quad .2.7.1$$

Y sobre el péndulo en dirección  $\hat{i}, \hat{j}$  [15] [14]:

$$(T \sin \theta)\hat{i} + (-T \cos \theta - W_2)\hat{j} = m_2 \ddot{\vec{P}}_2 \quad .2.7.2$$

Las componentes de aceleración tangencial y radial conformadas a las condiciones iniciales del péndulo invertido  $\theta = 0 \rightarrow \hat{e} = \hat{j}$  ;  $\hat{n} = -\hat{i}$  y  $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \hat{e} = -\hat{i}$  ;  $\hat{n} = -\hat{j}$  pueden expresarse como [14]:

$$\hat{e} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

$$\hat{n} = -\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}$$

$$\dot{\hat{e}} = -\dot{\theta} \cos \theta \hat{i} - \dot{\theta} \sin \theta \hat{j} = \dot{\theta} \hat{n}$$

$$\dot{\hat{n}} = \dot{\theta} \sin \theta \hat{i} - \dot{\theta} \cos \theta \hat{j} = -\dot{\theta} \hat{e}$$

$$\ddot{\hat{e}} = \ddot{\theta} \hat{n} - \dot{\theta}^2 \hat{e}$$

$$\therefore \ddot{\hat{e}} = \dot{\theta}^2 (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) - \ddot{\theta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \quad .2.7.3$$

$$\ddot{\hat{n}} = \dot{\theta}^2 \hat{n} - \ddot{\theta} \hat{e}$$

$$\therefore \ddot{\hat{n}} = \ddot{\theta} (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) - \dot{\theta}^2 (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \quad (49)$$

Se pueden obtener las ecuaciones de movimiento en términos de los vectores unitarios del marco de referencia global, como en el péndulo en movimiento. Tomando el producto punto de la cada ecuación 2.5.1 y 2.6.2 de movimiento con los vectores unitarios:

Para el péndulo en dirección  $\hat{i}$ , reemplazando la aceleración centrípeta con 2.6.3 [16] [15] [14]:

$$[T \sin \theta \hat{i} = m_2 (\ddot{x} \hat{i} + \ell \ddot{\hat{e}})] \cdot \hat{i}$$

$$\therefore T \sin \theta = m_2 (\ddot{x} \hat{i} + \ell (\ddot{\theta} \hat{n} - \dot{\theta}^2 \hat{e})) \cdot \hat{i}$$

$$\therefore T \sin \theta = m_2 (\ddot{x} \hat{i} + \ell (\dot{\theta}^2 (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) - \ddot{\theta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}))) \cdot \hat{i}$$

$$\therefore T \sin \theta = m_2 (\ddot{x} + \ell (\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta))$$

$$\therefore T \sin \theta = m_2 \ddot{x} + m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta \quad .2.7.4$$

En dirección  $\hat{j}$ :

$$[(T \sin \theta) \hat{i} + (-T \cos \theta - W_2) \hat{j} = m_2 (\ddot{x} \hat{i} + \ell \ddot{\hat{e}})] \cdot \hat{j}$$

$$-T \cos \theta - m_2 g = m_2 (\ddot{x} \hat{i} + \ell (\ddot{\theta} \hat{n} - \dot{\theta}^2 \hat{e})) \cdot \hat{j}$$



$$\therefore -T \cos \theta - m_2 g = m_2 \left( \ddot{x} \hat{i} + \ell \left( \dot{\theta}^2 (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) - \ddot{\theta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \right) \right) \cdot \hat{j}$$

$$\therefore -T \cos \theta - m_2 g = m_2 \ell (-\dot{\theta}^2 \cos \theta - \ddot{\theta} \sin \theta)$$

$$\therefore -T \cos \theta - m_2 g = -m_2 \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta - m_2 \ell \ddot{\theta} \sin \theta \quad .2.7.5$$

Se puede eliminar el término de la tensión de la siguiente manera [16]: se multiplica la expresión 2.6.4 del péndulo en  $\hat{i}$  por  $\cos \theta$  la que está en dirección  $\hat{j}$  y 2.6.5 por  $\sin \theta$  y se suman ambas expresiones para obtener una ecuación para el movimiento del péndulo únicamente en términos de aceleraciones angulares y lineales:

$$[T \sin \theta = m_2 \ddot{x} + m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta] \cdot \cos \theta$$

$$2.6.4 \cdot \cos \theta: \quad T \sin \theta \cos \theta = m_2 \ddot{x} \cos \theta + m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - m_2 \ell \ddot{\theta} \cos^2 \theta \quad .2.7.6$$

$$[-T \cos \theta - m_2 g = -m_2 \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta - m_2 \ell \ddot{\theta} \sin \theta] \cdot \sin \theta$$

$$2.6.5 \cdot \sin \theta: \quad -T \cos \theta \sin \theta - m_2 g \sin \theta = -m_2 \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - m_2 \ell \ddot{\theta} \sin^2 \theta \quad .2.7.7$$

La suma sería [16] [15] [14]:

$$-m_2 g \sin \theta = m_2 \ddot{x} \cos \theta - m_2 \ell \ddot{\theta} \quad .2.7.8$$

$$\therefore -g \sin \theta = \ddot{x} \cos \theta - \ell \ddot{\theta} \quad .2.7.9$$

La ecuación en términos de la fuerza  $F$  sobre el carro puede ahora expresarse sin el término de la tensión reemplazando 2.6.4 en 2.5.2 [16] [15] [14]:

$$F - T \sin \theta = m_1 \ddot{x}$$

$$\therefore F = m_1 \ddot{x} + T \sin \theta$$

$$\therefore F = m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} + m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta$$

$$\therefore F = (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta \quad .2.7.10$$

La solución de 2.6.10 para  $\ddot{x}$  y  $\ddot{\theta}$  [16] [15]:

$$\ddot{x} = \frac{F - m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta}{(m_1 + m_2)}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta + \ddot{x} \cos \theta}{\ell} \quad .2.7.11$$

Podrían agregarse los mismos coeficientes de fricción que se utilizaron para el péndulo en movimiento [16] [15]:

$$\ddot{x} = \frac{F - m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_2 \ell \ddot{\theta} \cos \theta - \mu_1 \dot{x}}{(m_1 + m_2)} \quad .2.7.12$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta + \ddot{x} \cos \theta - \frac{\mu_2 \dot{\theta}}{m_2 \ell}}{\ell} \quad .2.7.13$$

La forma matricial para el modelo descrito [14] [15] [16]:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\ell \\ m_1 + m_2 & -m_2 \ell \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \theta + \frac{\mu_2 \dot{\theta}}{m_2 \ell} \\ F - m_2 \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - \mu_1 \dot{x} \end{bmatrix} \quad .2.7.14$$

### 2.7.15. Derivación de las Ecuaciones de Movimiento Utilizando la Formulación de Lagrange

La formulación de Lagrange permite llegar a las ecuaciones de movimiento de una manera mucho más rápida, aunque este método es menos descriptivo de la cinemática del sistema en comparación con la formulación de Newton.

El Lagrangiano es equivalente al funcional de la diferencia entre la energía cinética total  $T$  y la energía potencial  $V$  del sistema:

$$L = T - V$$

Donde  $V$  es particular al sistema estudiado y:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k v_k^2$$

Por lo tanto, para el péndulo invertido tenemos que:

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Donde y de la ilustración 11:

$$v_1^2 = \dot{x}$$

$$v_2^2 = \dot{x}^2 - 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \ell^2\dot{\theta}^2$$

También de la ilustración 11:

$$V = mg\ell\cos\theta$$

Por lo tanto, el Lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 - 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \ell^2\dot{\theta}^2) - mg\ell\cos\theta$$

Desde las ecuaciones de Lagrange las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Sustituyendo  $L$  se obtiene la ecuación 5.5.13 y 5.5.15:

$$F = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2\ell\dot{\theta}^2\sin\theta - m_2\ell\ddot{\theta}\cos\theta$$

$$-g\sin\theta = \ddot{x}\cos\theta - \ell\ddot{\theta}$$

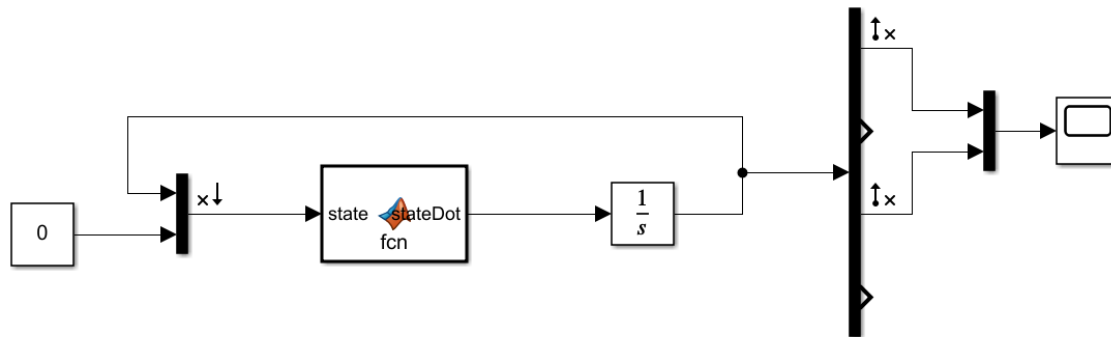
La forma matricial para la modelo descrita en la ecuación 2.6.14 es de la forma  $AX = B$ , donde  $X$  es el vector de variables de estado. Resolviendo para el vector implica reescribir la ecuación en la forma:  $X = A^{-1}B$  [16].

$\Delta_A$ : Es el  
determinante  
de  $A$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{bmatrix} -m_2\ell\cos\theta & \ell \\ -m_1 - m_2 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g\sin\theta + \frac{\mu_2\dot{\theta}}{m_2\ell} \\ F - m_2\ell\dot{\theta}^2\sin\theta - \mu_1\dot{x} \end{bmatrix} \quad .2.7.16$$

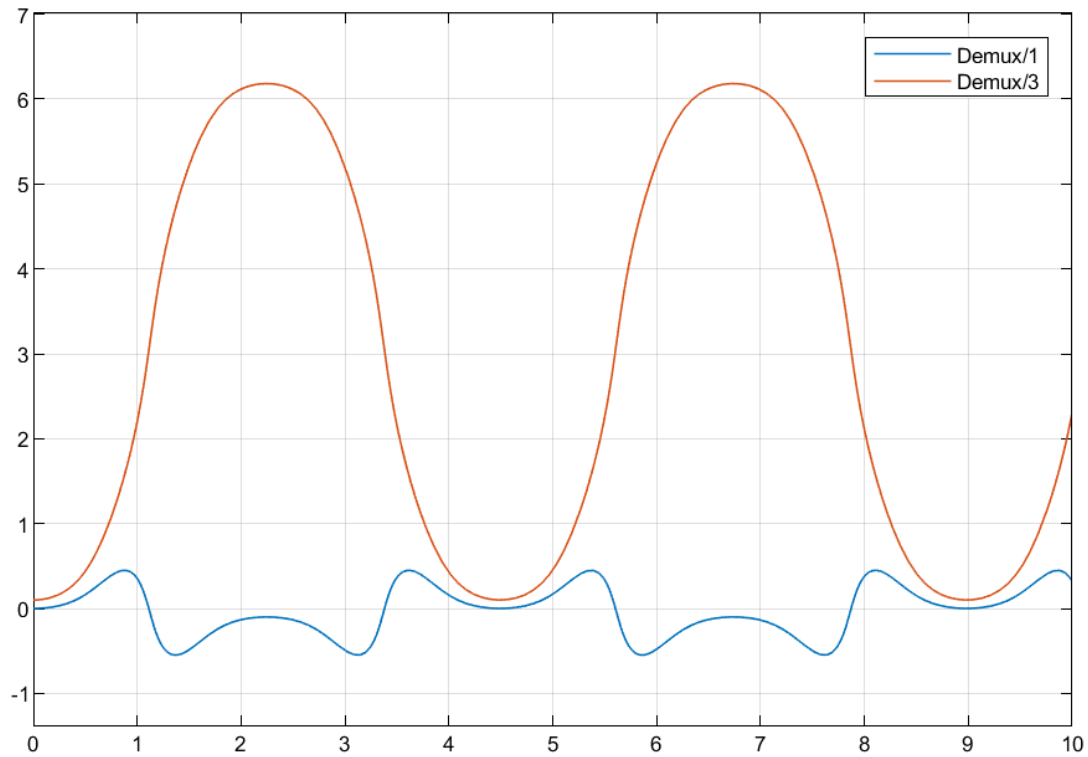
$$\Delta_A = m_2 \ell (m_1 + m_2) - m_2^2 \ell \cos^2 \theta$$

El comportamiento de este sistema se puede visualizar usando Simulink empleando el siguiente sistema con una condición inicial de  $\theta(0) = 0.01$  rad y los parámetros de la sección 3.1:



*Ilustración 12: El diagrama de MATLAB para el sistema del péndulo invertido donde las ecuaciones de las variables de estado se encuentran en un bloque tipo función programada [16]*

Se observa el comportamiento como en la ilustración:



*Ilustración 13: La oscilación del péndulo (rojo) causa un desplazamiento en el carro (azul) [16].*

De la ilustración 21 se puede observar que el comportamiento del sistema carro-péndulo invertido es altamente no lineal, pero para ángulos pequeños se puede hacer una linealización para controlar el sistema. Esto se puede observar en la siguiente ilustración:

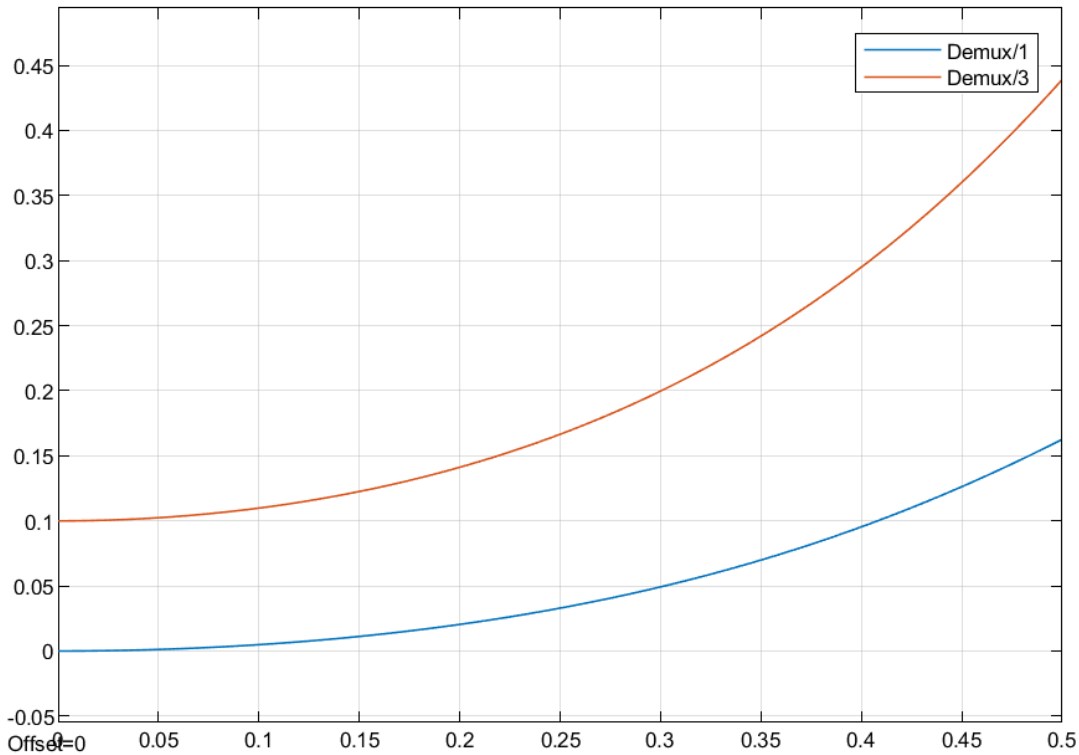


Ilustración 14: Durante el intervalo para  $t(s) = (0:0.05)$  se puede observar una correspondencia aproximadamente lineal entre el péndulo y el carro [17].

Para confinar el sistema a las condiciones de la ilustración 13, es necesario realizar una linealización del sistema como en el sistema del péndulo simple con la serie de Taylor.

#### 2.7.17. Linealización de las ecuaciones de Movimiento

Para un ángulo  $\phi$  muy pequeño, podemos hacer la siguiente linealización se toma el punto de equilibrio tomando  $\theta(0) = \pi$  [17] [9]:

$$\theta = \pi + \phi$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\phi}^2 \approx 0$$

$$\begin{aligned} \text{De acuerdo con el} & \quad \therefore \cos \theta = \cos(\pi + \phi) \approx -1 & 2.7.18. \\ \text{procedimiento en (9)} & \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\pi + \phi) \approx -\phi \quad 2.7.19.$$

Entonces (tomando en cuenta el nuevo punto de equilibrio  $\theta(0) = \pi$  y un momento de inercia para el péndulo  $\neq 0$ ) [17] [16] [15]:

$$F = (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2\ell\dot{\theta}^2 \sin \theta + m_2\ell\ddot{\theta} \cos \theta$$

$$\therefore F = (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2\ell\ddot{\phi} + \mu_1\dot{x} \quad .2.7.20$$

Donde  $F$  puede considerarse como un estado adicional al sistema. En el contexto de análisis y de control del sistema se refiere a  $F$  como la entrada, o variable programada (input)  $u$  al sistema.

$$m_2\ell g \sin \theta = -\ddot{x}m_2\ell \cos \theta - \ddot{\theta}(I + m_2\ell)$$

$$\therefore m_2\ell g \phi = \ddot{x}m_2\ell - \ddot{\phi}(I + m_2\ell)$$

$$\therefore \ddot{\phi}(I + m_2\ell^2) - m_2\ell g \phi = \ddot{x}m_2\ell \quad .2.7.21$$

Las ecuaciones para las variables de estado para el sistema linealizado son las soluciones de 2.6.20 y 2.6.21 para  $\ddot{\phi}$  y  $\ddot{x}$  [17]:

$$\ddot{\phi} = \frac{\ddot{x}m_2\ell - m_2\ell g \phi}{(I + m_2\ell)} \quad .2.7.22$$

$$\ddot{x} = \frac{F + m_2\ell\ddot{\phi} - \mu\dot{x}}{(m_1 + m_2)} \quad .2.7.23$$

En forma matricial del sistema es [14] [17]:

$$\begin{bmatrix} m_2\ell & -I - m_2\ell \\ m_1 + m_2 & -m_2\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2\ell g \phi \\ F - \mu_1\dot{x} \end{bmatrix} \quad .2.7.24$$

Usando el mismo diagrama en Simulink como en la ilustración 12, se puede comprobar que el sistema linealizado tiene un comportamiento muy parecido al comportamiento del sistema real para ángulos muy pequeños:

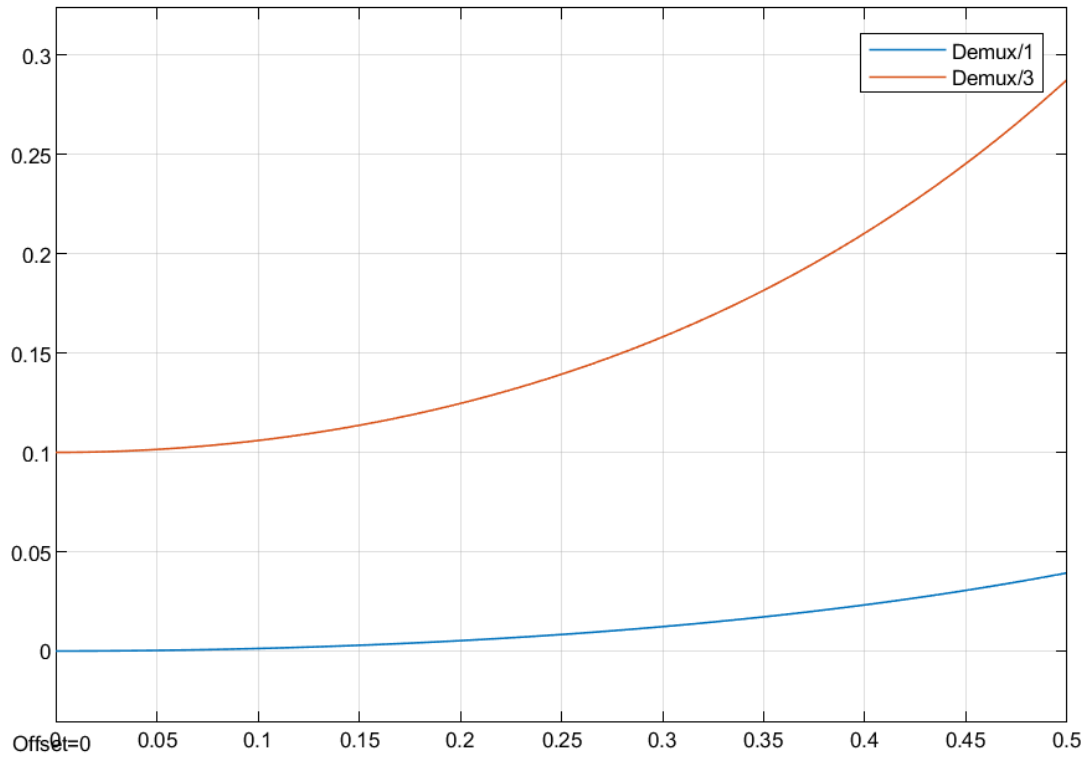


Ilustración 15: El comportamiento del péndulo invertido linealizado. [16] [17]

## 2.8. Análisis del sistema en Lazo Abierto

En esta sección se analiza el comportamiento del sistema del péndulo invertido para determinar la respuesta al impulso para lazo abierto (open-loop response) donde no hay realimentación y no se compara la variable programada con la variable de actuación, es decir no hay control [18].

Para realizar el análisis de la respuesta del sistema es necesario encontrar la función de transferencia para las ecuaciones de estado linealizadas. La ecuación de transferencia es igual a la transformada de Laplace para la ecuación asumiendo condiciones iniciales iguales a cero entonces para y posteriormente resolviendo la función transformada para la expresión  $\frac{\text{output}}{\text{input}}$  [18].

Aplicando (2) en 2.6.20 y 2.6.21 [17]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(2.6.20): \quad & \mathcal{L}(\ddot{x}m_2\ell) = \mathcal{L}(\ddot{\phi}(I + m_2\ell^2) - m_2\ell g\phi) \\ & m_2\ell X(s)s^2 = (I + m_2\ell^2)\Phi(s)s^2 - m_2\ell g\Phi(s) \quad .2.8.1 \\ \mathcal{L}(2.6.21): \quad & \mathcal{U}(s) = \mathcal{L}\left((m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2\ell\ddot{\phi} + \mu_1\dot{x}\right) \end{aligned}$$



$$\therefore \mathcal{U}(s) = (m_1 + m_2)\mathcal{X}(s)s^2 + \mu\mathcal{X}(s)s - m_2\ell\Phi(s)s^2 \quad .2.8.2$$

Aplicando la transformada de Laplace para las ecuaciones de estado nos arroja dos ecuaciones,  $\mathcal{X}(s)$  en función de  $\Phi(s)$  y  $\mathcal{U}(s)$  en función de  $\mathcal{X}(s)$  y  $\Phi(s)$  que representan una relación entre diferentes entradas y diferentes salidas (un sistema MIMO (multiple input, multiple output)). Para los propósitos de esta tesis se requiere tener una única relación entrada y salida (sistema SISO, single input, single output) [17] por ecuación. Resultando en dos ecuaciones de transferencia para un solo sistema.

Despejando  $\mathcal{X}(s)$  de 2.8.1 en 2.8.2 se obtiene una ecuación para  $\mathcal{U}(s)$  con una sola variable  $\Phi(s)$  [17] lo cual representa una función para el ángulo en términos de una fuerza externa que acelera el carro:

Despeje de la variable:

$$\mathcal{X}(s) = \left( \frac{I + m_2\ell^2}{m_2\ell} - \frac{g}{s^2} \right) \Phi(s) \quad .2.8.3$$

Sustitución en 2.8.2:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(s) = (m_1 + m_2) \left( \frac{I + m_2\ell^2}{m_2\ell} - \frac{g}{s^2} \right) \Phi(s)s^2 + \\ \mu \left( \frac{I + m_2\ell^2}{m_2\ell} - \frac{g}{s^2} \right) \Phi(s)s - m_2\ell\Phi(s)s^2 \end{aligned} \quad .2.8.4$$

La entrada es la fuerza  $\mathcal{U}(s)$  y la salida es un ángulo  $\Phi(s)$ . En acorde con lo anteriormente dicho, la función de transferencia es la relación de la función de la salida a la de la entrada del sistema ambas en sus respectivas formas complejas  $s$  (transformadas por la transformada de Laplace). Por lo tanto [17, 18]:

$$P_1(s) = \frac{\Phi(s)}{\mathcal{U}(s)}$$

Despejando  $\Phi(s)$  de 2.7.3

$$\Phi(s) = \frac{m_2\ell\mathcal{X}(s)s^2}{(I + m_2\ell^2) - m_2\ell g}$$

$$\therefore P_1(s) = \frac{\frac{m_2 \ell}{q} s^2}{s^4 + \frac{\mu(I + m_2 \ell^2)}{q} s^3 - \frac{(m_1 + m_2)m_2 \ell g}{q} s^2 - \frac{\mu m_2 g l}{q} s} \quad .2.8.5$$

La ecuación 2.7.5 tiene un polo y un cero en el origen  $s = 0$ . Se puede eliminar multiplicando el numerador y denominador por  $\frac{1}{s}$  para obtener la ecuación de la forma:

$$P_1(s) = \frac{\frac{m_2 \ell}{q} s}{s^3 + \frac{\mu(I + m_2 \ell^2)}{q} s^2 - \frac{(m_1 + m_2)m_2 \ell g}{q} s - \frac{\mu m_2 g l}{q}} \quad .2.8.6$$

De igual manera a como se halló la función de transferencia  $P(s)$  para el ángulo  $\Phi(s)$  en función de la fuerza  $U(s)$  de aceleración sobre el carro, se puede también hallar una función de transferencia  $P_c(s)$  para la posición del carro  $X(s)$  en función de la fuerza externa:

$$P_2(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$$

$$q = (m_1 + m_2)(I + m_2 \ell^2) - (m_2 \ell)$$

$$P_2(s) = \frac{\frac{m_2 \ell}{q} s}{s^3 + \frac{\mu(I + m_2 \ell^2)}{q} s^2 - \frac{(m_1 + m_2)m_2 \ell g}{q} s - \frac{\mu m_2 g l}{q}} \quad .2.8.7$$

Por lo tanto, la respuesta del sistema puede ser descrita por dos funciones de transferencia simultáneamente, las cuales involucran diferentes tipos de entradas y salidas respectivamente. El uso de una ecuación u otra depende del tipo de entrada proporcionada al sistema y el tipo de salida que sea interesante.

Las ecuaciones del modelo linealizado pueden ser expresadas de forma matricial como una serie de ecuaciones diferenciales de primer orden [17].

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + m_2 \ell^2)b}{I(m_1 + m_2) + m_2 m_1 \ell^2} & \frac{m^2 g \ell^2}{I(m_1 + m_2) + m_2 m_1 \ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m_2 \ell b}{I(m_1 + m_2) + m_2 m_1 \ell^2} & \frac{m_2 g \ell (m_1 + m_2)}{I(m_1 + m_2) + m_2 m_1 \ell^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + m_2 \ell^2}{I(m_1 + m_2) + m_2 m_1 \ell^2} \\ 0 \\ \frac{m_2 \ell}{I(m_1 + m_2) + m_2 m_1 \ell^2} \end{bmatrix} u$$

.2.8.8

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Con el propósito de poder realizar un análisis del sistema que arroje conclusiones útiles para el desarrollo de un controlador, se asignan valores a los parámetros del sistema como en [17] y se fijan unos criterios para determinar la calidad de la respuesta del sistema en respuesta a una entrada de la forma de un impulso de fuerza ( $\delta$ )  $1 \text{ N}\cdot\text{s}^{-1}$  y para un desplazamiento ( $u(t)$ ) de  $0.2 \text{ m}$ .

### 2.8.9. Diagramas de Bode

Para sistemas LTI, sistemas que solo varían en fase y amplitud, se puede analizar la respuesta a diferentes frecuencias variando la frecuencia exponencialmente con respecto a la fase y la amplitud de la señal y graficando la función resultante. Los diagramas de bode pueden ser utilizados para evaluar la estabilidad del sistema de lazo cerrado cuya realimentación que contiene amplificación negativa. La ganancia de la amplificación negativa está dada por [19]:

$$G_{FB} = \frac{G_{OL}}{1 + \beta G_{OL}}$$

Donde  $G_{OL}$  es la ganancia del lazo abierto, y  $\beta$  es el factor de realimentación. Evaluando esta ecuación se puede ver que para  $\beta G_{OL} = -1$  da como resultado una amplificación infinita lo que significa que el sistema se torna inestable, implicando que la condición es un criterio de inestabilidad, llamado el criterio de Barkhausen [19]. Tomando en cuenta que el argumento de  $G_{OL}$  es un argumento complejo que consiste en una magnitud y una fase, la solución para el criterio implica que la magnitud de  $G_{OL} = 1/\beta$  y la fase sea  $180^\circ$ .

La evaluación del criterio de Barkhausen en el diagrama de Bode consiste en encontrar y comparar las frecuencias en las que la magnitud (ganancia) es  $1 = 0 \text{ dB}$  y la fase es  $180^\circ$ . Se puede hallar la magnitud para la frecuencia en  $180^\circ$  manipulando el argumento complejo de  $G_{OL}$  [19]:

$$\beta G_{OL}(\omega_{180}) = -|\beta G_{OL}(\omega_{180})|$$

$$|\beta G_{OL}(\omega_{0 \text{ dB}})| = 1$$

La proximidad de  $|\beta G_{OL}(\omega_{0 \text{ dB}})|$  a 1 es el margen de ganancia mientras que la proximidad de  $-|\beta G_{OL}(\omega_{180})| = 1$  es el margen de fase. Teniendo en cuenta que  $\text{dB} = 20 \log_{10}(\text{Amplitud})$  el margen de ganancia puede ser calculado con:

$$20 \log_{10}(|\beta G_{OL}(\omega_{180})|)$$

Si las dos frecuencias ocurren en el mismo lugar gráficamente, es decir  $\omega_{180} = \omega_{0 \text{ dB}}$ , esto implica que la amplificación es inestable, la condición es dada por:

$$|(\beta G_{OL}(\omega_{180}))(\beta G_{OL}(\omega_{0dB}))| = 1$$

Posteriormente, se hallará la gráfica de Bode para el sistema de péndulo invertido para evaluar el criterio de inestabilidad de Barkhausen.

### 2.8.10. Criterio de Estabilidad de Ubicación de Polos

Para una función de transferencia  $G(s)$  de un sistema con realimentación de unidad, la función de transferencia del sistema sería:

$$G(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)}$$

Donde las raíces de  $1 + P(s)$  son los eigenvalores del sistema. Si los eigenvalores son negativos, el sistema es estable. Si los eigenvalores son positivos, el sistema es inestable, pues los valores del sistema no convergen en el espacio de fases. [20]

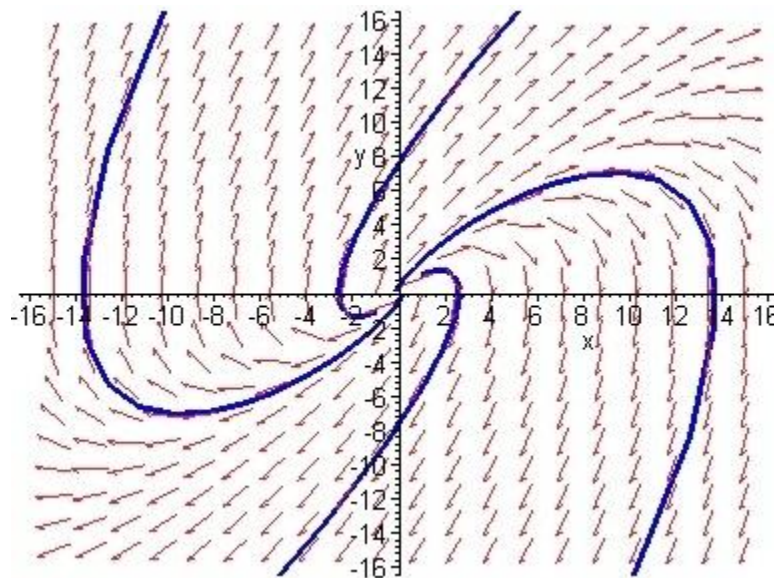


Ilustración 17: Plano de fase para un sistema inestable es totalmente divergente. [20]

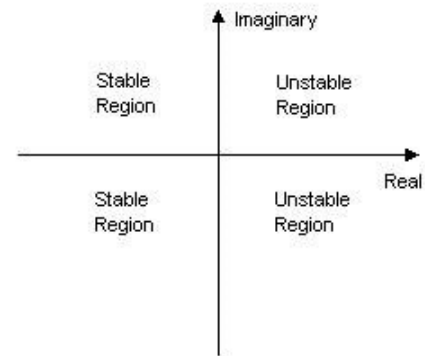


Ilustración 16: Las regiones del plano complejo de acuerdo con la estabilidad. [20]

Se puede evaluar el criterio de estabilidad de la ubicación de los polos: [21]

$$\frac{3\pi}{2} > \left| \arg(\text{eig}(G(s))) \right| > \frac{\pi}{2}$$

Aunque teóricamente el modelo demuestra la estabilidad si cumple la condición anterior, en algunos casos en la realidad puede haber variables o condiciones no contabilizadas que pueden restringir la región de estabilidad también se podría restringir dependiendo de los requisitos del diseño y las especificaciones técnicas de los sistemas involucrados. En el sistema estudiado en esta tesis se le asignan unos criterios de control y unos parámetros para que el sistema pueda ser evaluado.

3.1.1. Los parámetros del sistema son:

- $m_1 = 0.5 \text{ Kg}$
- $m_2 = 0.2 \text{ Kg}$
- $\mu = 0.1$
- $I = 0.006 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$
- $\ell = 0.3 \text{ m}$

Despejando los parámetros en las ecuaciones de estado:

$$\ddot{\phi} = \frac{1100\ddot{x} - 10791\phi}{484} \quad .3.1.2$$

$$\ddot{x} = \frac{350(F - \mu\dot{x}) - 21\ddot{\phi}}{245} \quad .3.1.3$$

Los criterios para la calidad de la respuesta del sistema [17]:

- Tiempo de estabilización para  $x$  y  $\theta$  de menos de 5s para  $\delta(t) = 1 \text{ N}\cdot\text{s}^{-1}$
- Tiempo de subida (rise-time) de  $x$  es menor a 0.5s.
- $0 \leq \theta \leq 0.05 \text{ rad}$  para  $\delta(t)$  y  $0 \leq \theta \leq 0.35 \text{ rad}$  para  $u(t)$ .

Evaluando el sistema en MATLAB con los parámetros y criterios anteriormente mencionados se obtiene las funciones de transferencia:

```
>> tf(P_pend)
ans =
          1.045e-05 s
-----
2.3e-06 s^3 + 4.182e-07 s^2 - 7.179e-05 s - 1.026e-05
Continuous-time transfer function.
```

```
>> tf(P_cart)

ans =

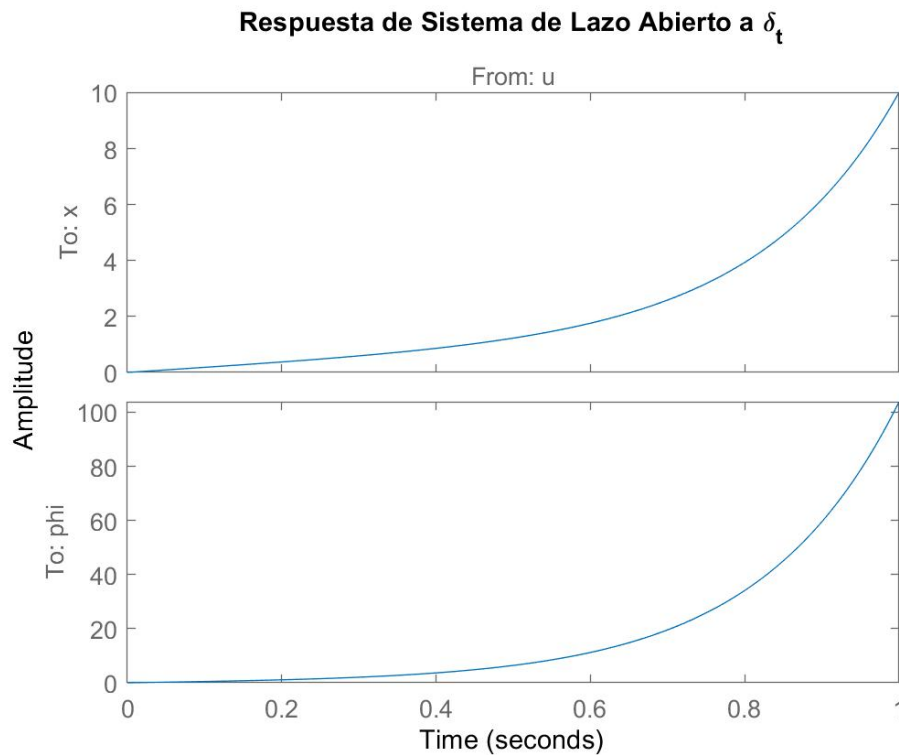
          4.182e-06 s^2 - 0.0001026
-----
2.3e-06 s^4 + 4.182e-07 s^3 - 7.179e-05 s^2 - 1.026e-05 s

Continuous-time transfer function.
```

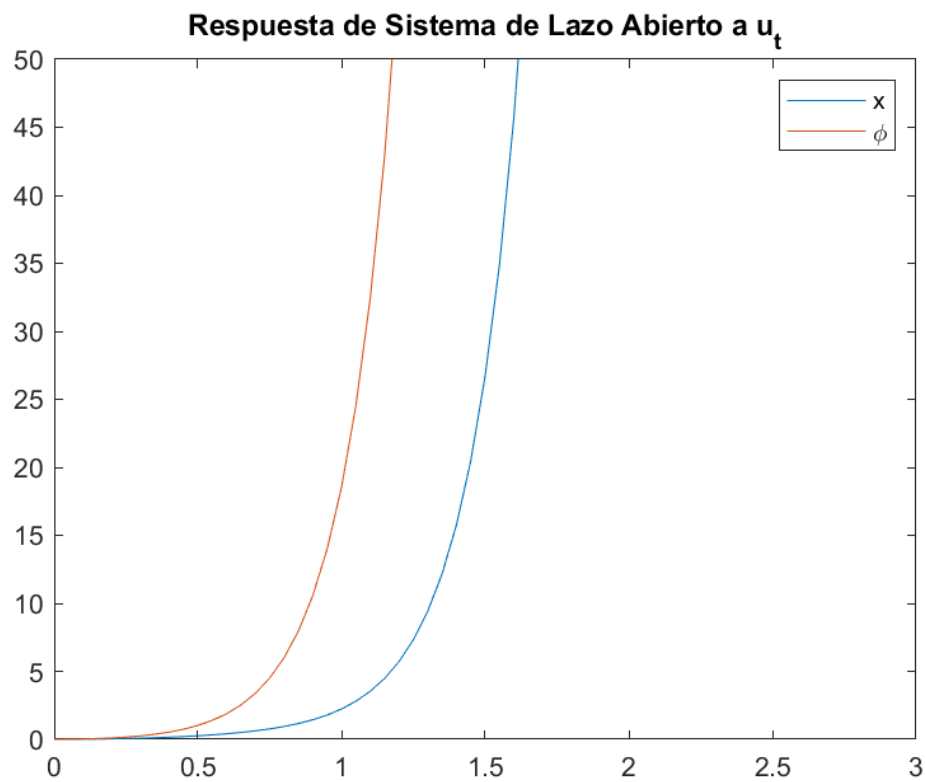
La grafica demuestra que la respuesta del sistema de lazo abierto es la inestabilidad, pues la posición angular  $\phi$  supera mucho el criterio para la linealización del sistema y los criterios de respuesta. El carro se mueve de una manera acelerada que no respeta el criterio de respuesta mencionado. Esto es debido a que el sistema tiene polos en la parte derecha del plano complejo. A pesar de que el sistema tiene dos ecuaciones de transferencia los polos no cambian de una ecuación a otra, pero los ceros sí [17]. Los ceros de cada ecuación del sistema y sus polos se pueden encontrar en MATLAB:

<pre>&gt;&gt; [zeros poles]=zpkdata(P_pend,'v')  zeros = 0  poles = 5.5680; -5.6069; -0.1428</pre>	<pre>&gt;&gt; [zeros poles]=zpkdata(P_cart,'v')  zeros = 4.9523; -4.9523  poles = 0; 5.5680; -5.6069; -0.1428</pre>
----------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Efectivamente el resultado demuestra que los polos son idénticos para ambas funciones de transferencia. El polo en 5.5680 demuestra que es inestable ya este polo está en la parte derecha del plano complejo  $s$ . La respuesta del sistema de lazo abierto también debe ser inestable ya que existe un polo en la parte derecha del plano complejo  $s$ . Se puede comprobar gráficamente usando MATLAB:

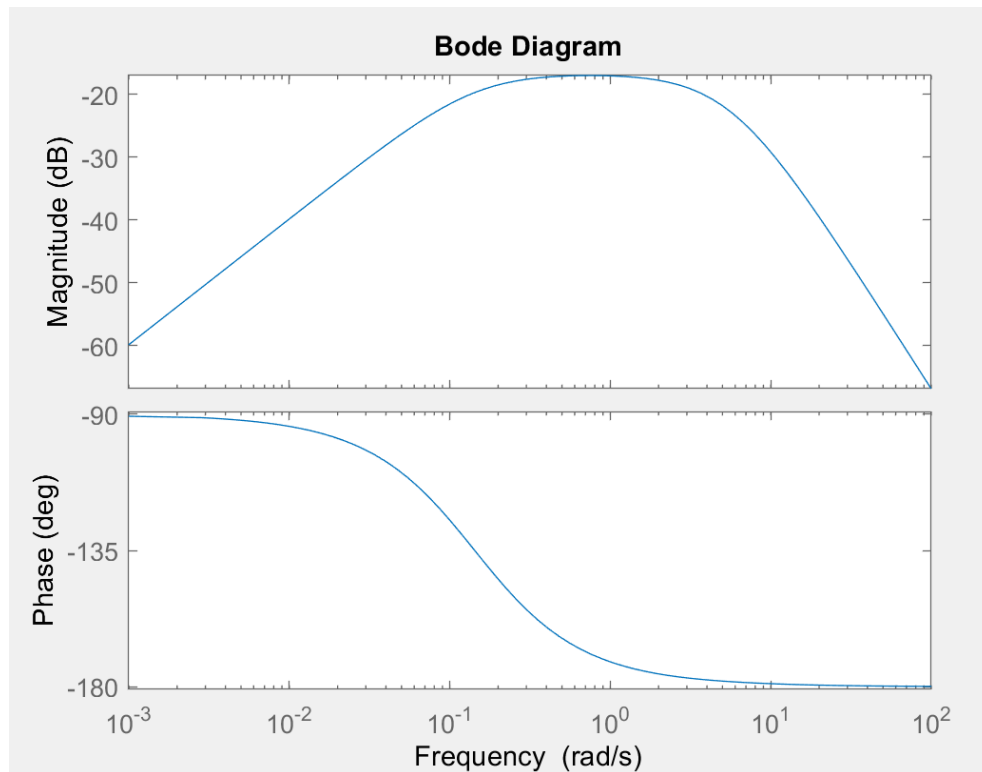


*Ilustración 18: La grafica representa la respuesta de las variables de estado a un impulso el tiempo. [10]*



*Ilustración 19: Grafica de la respuesta del sistema a una excitación de tipo escalón es inestable, cumpliendo la predicción [17].*



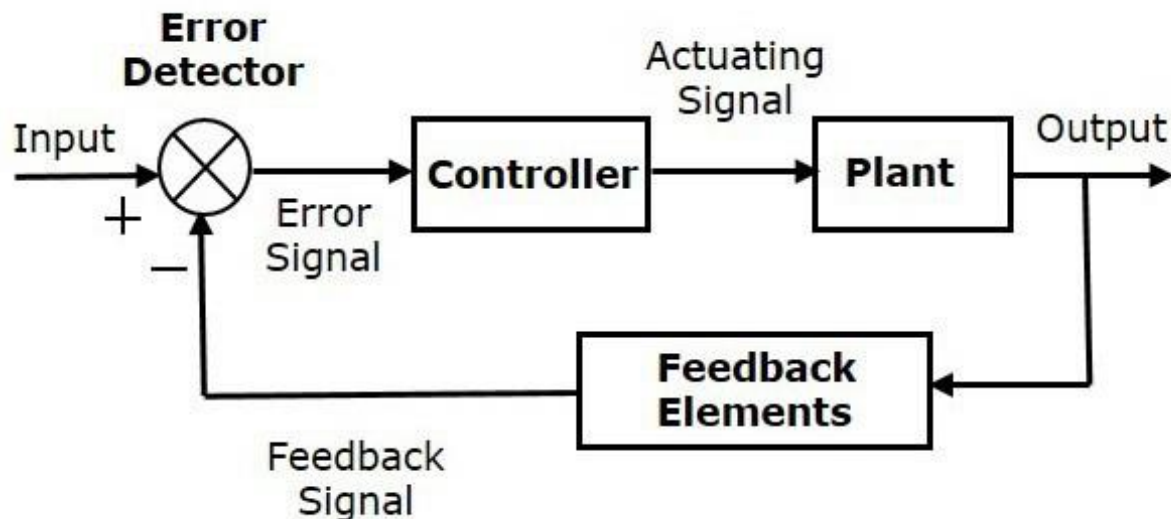


*Ilustración 20: Diagrama de Bode para sistema sin controlador.*

Para el sistema del péndulo invertido de lazo cerrado se puede analizar de varias maneras ya que hay diferentes tipos de control como control en respuesta a frecuencia, root locus y PID. En esta tesis se llevará a cabo el análisis del sistema utilizando un control PID y que es efectivo y adecuado para un control de tipo regulador (la variable de referencia es cero). A continuación, es una construcción deductiva del controlador con el objetivo de contextualizar conceptos claves para el objetivo de esta tesis.

### 3. Control del Péndulo Invertido PID

El control PID es un tipo de controlador basado en la realimentación (feedback) que resulta de la unión de 3 tipos de controladores (proporcional, integrador, derivador) los tres suman sus aportes de tal manera que la planta reciba una señal de variable de actuación adecuada para lograr el control del sistema. [22]



*Ilustración 21: Un sistema de lazo cerrado [23]. Para el caso del péndulo invertido el input es siempre igual a 0 o  $\pi$  dependiendo del marco de referencia.*

Un sistema de control tiene las siguientes señales [23]:

- Señal de variable ordenada: la variable ordenada es el valor de referencia que se le coloca a un sistema que busca alcanzar y mantener de una manera estable. Por ejemplo, para un generador, un voltaje determinado, o para una compuerta una apertura determinada. También es llamada SP (set point).
- Señal de termino de error: la señal de error es el resultado de la comparación entre la señal realimentada (estado actual del sistema) y la señal de variable ordenada (referencia). Esta señal es la que entra al controlador.
- Señal de variable de accionamiento: la señal que sale del controlador y entra a la planta es la señal de accionamiento, esta señal es la que la planta usa para regular su funcionamiento.
- Señal de variable controlada: la señal que sale de la planta es el resultado del control sobre la planta. Si el control es adecuado, la señal controlada tiende a acercarse al valor de la variable ordenada. También es llamada PV (processed variable).

- e. Señal de variable realimentada: La señal controlada se reingresa al sistema para realizar la comparación entre el valor ordenado y la señal resultante de la planta.

Para el sistema del péndulo invertido la ilustración 18 puede ser reducido a:

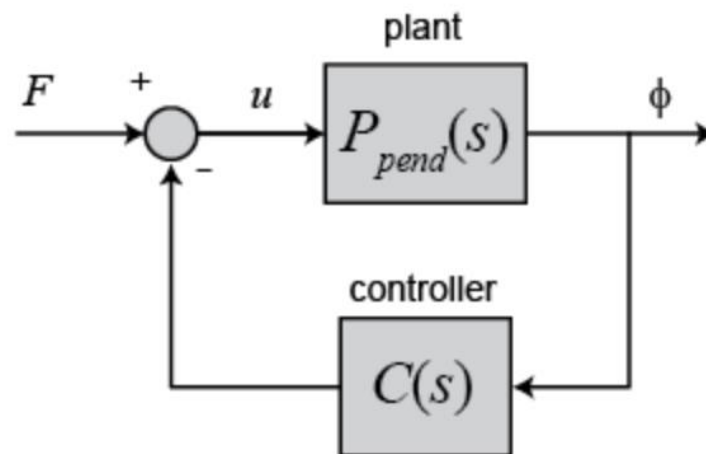


Ilustración 22: El diagrama de bloques se puede reducir debido a que la referencia siempre es 0

Ya que el control es un sistema tipo regulador, por lo tanto, la señal realimentada es igual a la señal de error. La función de transferencia para el sistema en la ilustración 19 queda como:

$$T(s) = \frac{\Phi(s)}{F(s)} = \frac{P_1(s)}{1 + C(s)P_1(s)} \quad .3.1.1$$

Si no hay perturbacion, el control actua sobre las condiciones iniciales de la planta exclusivamente.

### 3.2. Razones Utilizar un Controlador PID

El uso de un sistema de control PID tiene varias ventajas, una es su forma intuitiva de funcionamiento que permite la asignación independiente de las ganancias de sus diferentes componentes (el proceso de afinamiento del controlador, expuesto a continuación). El uso efectivo de un sistema de control PID depende de la calidad del afinamiento del controlador, integral y derivador además de su adecuación a las diferentes características del sistema (no-linealidad, saturación, sensibilidad al ruido, etc.). Por lo tanto, el conocimiento detallado del sistema puede ser necesario para poder controlarlo efectivamente ya que existen unos límites para esta técnica de control [22].

Un control PID resulta no es útil para un sistema [22]:

- Altamente no-lineal.
- Un sistema que tiene un retraso muy alto.
- Un sistema que no tiene fase mínima, es decir el sistema no es causal.

Si se establece que el sistema no tiene ninguna de las propiedades mencionadas anteriormente, entonces el sistema se puede controlar con un PID. En acuerdo con lo anterior, la efectividad del control PID depende del afinamiento de este. Para ello, se requiere un conocimiento del sistema para poder describir su respuesta ante una señal de actuación. Este conocimiento puede tener la forma de un modelo matemático descrito como una función de transferencia, matriz de espacio de estados, ecuaciones de movimiento o diagrama de bloques entre otros. Si existe dicho modelo, se puede abordar el proceso de control desde un enfoque basado en modelos (en este caso matemáticos). En algunos casos, no hay modelo matemático, pero si hay una planta física, en ese caso se aborda el control heurísticamente con técnicas como Ziegler-Nichols o Cohen-Coon que miden la respuesta del sistema con una secuencia de señales de entrada predeterminada usualmente de escalón  $u(t)$  para calibrar las respuestas del control. Una vez la respuesta del sistema es conocida esto puede llevar a un modelo matemático el cual permite el uso de una técnica con un enfoque a modelos, alternativamente si no se desea utilizar una técnica heurística pero tampoco se puede desarrollar un modelo matemático detallado del sistema se puede usar un enfoque basado en la identificación del sistema. Este enfoque consiste en usar un conocimiento general de los sistemas e intentar emparejar el sistema con otro cuyas respuestas sean similares y así asignar las ganancias de los controladores de una manera adecuada [22].

En conclusión, hay dos maneras para afinar un sistema PID [22]:

- Afinamiento manual: se utiliza la teoría de control para escoger las ganancias. Técnicas como colocación de polos (root locus) o diagramas de lazo abierto (open loop) como Bode o Nyquist. Esto se puede hacer cuando existe un modelo matemático detallado del sistema.
- Método heurístico: se utiliza cuando no hay un modelo matemático detallado del sistema. Se calibra la respuesta del sistema y luego se emplean técnicas como Ziegler-Nichols o Cohen-Coon entre otras para escoger las ganancias.

El controlador para el sistema del péndulo invertido se diseñará utilizando el método de colocación de polos.

**Nota:** El controlador se diseñará el método de Root Locus, posteriormente a la construcción conceptual del controlador PID. Esto implica que las ganancias del controlador halladas con el

método de colocación de polos se vean utilizadas antes de que el método se aplique al sistema en cuestión.

### 3.3. Construcción del Controlador PID

Considere el siguiente ejemplo: una persona en una cancha de futbol quiere caminar hasta la línea de mediocampo que está a 50 metros. El controlador continuamente está comparando el error en el tiempo  $E(t)$  con la señal realimentada  $pv(t)$  [22].

Al iniciar el trayecto, error esta en su valor maximo 50m. El cerebro es el controlador, y ordena las piernas (la planta) a caminar a una velocidad determinada. Una manera en la que el cerebro puede decidir la velocidad de la marcha es comparando la distancia actual con la restante. En este ejemplo se toma una constante de ganancia para el controlador de  $k_p = 0.1$  tal que la señal del controlador obdezca la funcion  $u_p$  donde  $k_p$  es la ganancia del controlador proporcional [22]:

$$u_p(t) = k_p \cdot E(t) \quad .3.3.1$$

$$\therefore u_p(t) = 0.1 \cdot E(t)$$

Entonces para un error inicial de  $E(t) = 50\text{m}$  tenemos la velocidad de  $u_p(t) = 5 \text{ m/s}$  y luego para la mitad del camino  $E(t) = 25\text{m} \rightarrow u_p(t) = 2.5 \text{ m/s}$  y asi sucesivamente hasta llegar a un error de cero lo cual le corresponderia una velocidad de cero.

Este controlador resulta util en el caso de la marcha, ya que el estado inicial y el estado final de la planta son iguales. Para el sistema analizado del péndulo invertido tenemos el caso que para el controlador  $E(t) = \theta(t)$  y  $sp = 0$  (sistema regulador). Además, el controlador proporcional tiene un comportamiento que disminuye proporcionalmente la señal de la variable de accionamiento a medida que el error se disminuye. El valor de la señal de accionamiento no puede ser arbitrariamente pequeña como sucede en el controlador ya que para cada ángulo  $\theta$  corresponde un torque generado por el peso del péndulo que superara en algún momento el torque generado por el desplazamiento del carro (la planta) y las fuerzas de fricción.

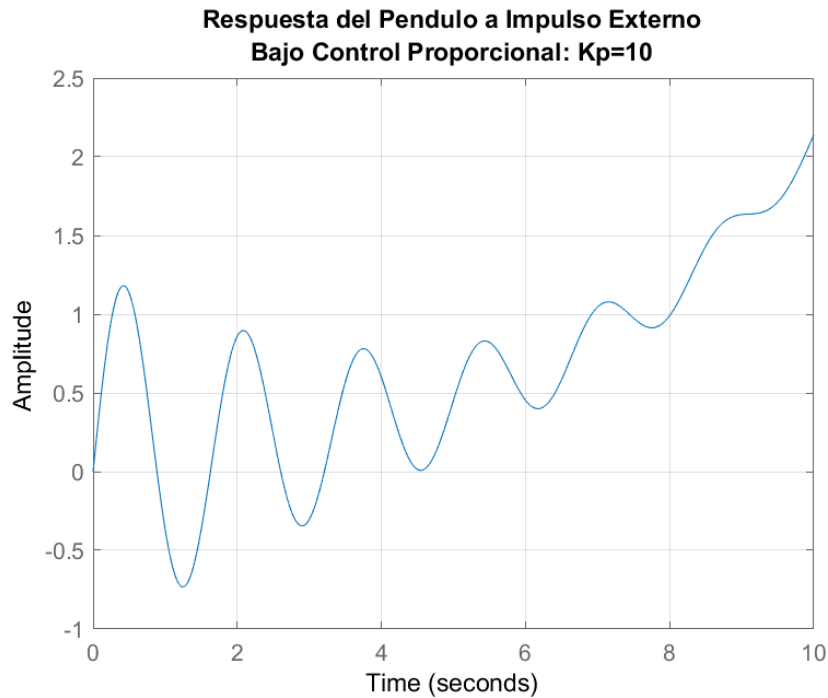
Para este controlador es imposible de eliminar ya que incrementando la ganancia  $K_p$  del controlador proporcional solamente hará que el péndulo se acerque más a su posición de equilibrio, pero sin lograr llegar el equilibrio, pues se acerca tangencialmente al equilibrio a medida que la ganancia del controlador proporcional se incrementa [22]:

$$[K_p \rightarrow \infty] \rightarrow E(t) \rightarrow 0$$

Esto torna el sistema en uno inestable, ya que eventualmente el error vuelve e incrementa alejando  $\theta(t) = pv(t)$  del punto de equilibrio. El sistema exhibirá un comportamiento oscilatorio o si  $\theta(t)$  se vuelve inestable sin importar la ganancia del controlador

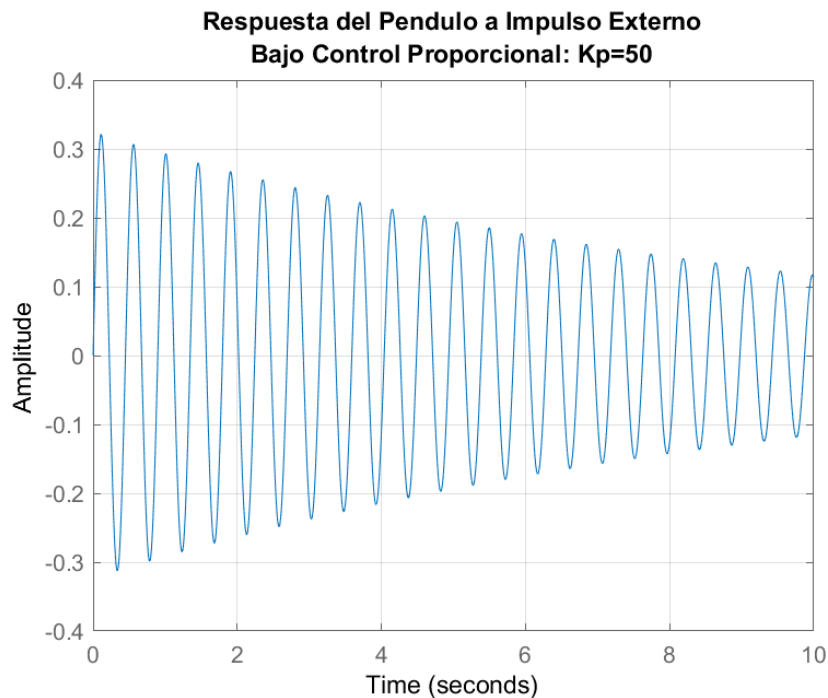
Los 4 polos de la función de transferencia se desplazan en las asíntotas verde, roja, naranja y azul respectivamente para una ganancia  $K_i$  que varía entre 0 y  $\infty$ .

Se puede observar en MATLAB el comportamiento correspondiente en el dominio del tiempo para el del péndulo invertido con un controlador proporcional:



*Ilustración 23: El controlador proporcional no logra estabilizar el sistema con una ganancia de  $K_p=10$  [17].*

El controlador no logra estabilizar el péndulo, las fuerzas de torque vencen a las fuerzas de la planta y el sistema se torna inestable. Incrementando la ganancia del controlador se observa:



*Ilustración 24: El controlador proporcional para el péndulo invertido con una ganancia Kp=50 [17].*

El péndulo oscila alrededor de su punto de equilibrio mientras que el controlador trata de compensar los torques alrededor del pivote del péndulo, pero no el sistema no logra la estabilidad. Este error persistente se llama un error de estado estacionario (steady state error) [22]. Para que el error de estado estacionario pueda reducirse, es necesario que el sistema se le agregue un componente adicional, que toma en cuenta el error pasado en el tiempo (memoria) y propicie una señal proporcionalmente al contenido de la memoria (suma de los errores en el tiempo).

Este componente compensador es el componente integrador pues su función es el resultado de la integral del error entre el tiempo inicial y el tiempo de medida donde  $k_i$  es la ganancia del controlador integrador [22]:

$$u_i(t) = k_i \cdot \int_0^t E(x) dx \quad .3.3.2$$

En el dominio complejo  $s$ , agregar un integrador implica multiplicar la función de transferencia por un factor  $\frac{1}{s}$  esto tiene el efecto de remover un polo de la función ya que la multiplicidad del denominador se reduce

Como la integral de una constante diferente e mayor a cero es una funcion linear creciente, el controlador integrador siempre dara una orden de incrementar la potencial mientras que el error persista. Sumando las salidas del control proporcional e integral, se puede eliminar el error del sistema y lograr que mantenga un estado estable alrededor de  $sp$ . La funcion del controlador  $PI$  se podria resumir sumando las ecuaciones 3.3.2 y 3.3.1 para obtener [22]:

$$u_{pi}(t) = u_i(t) + u_p(t)$$

$$\therefore u_{pi}(t) = k_p \cdot E(t) + k_i \cdot \int_0^t E(x) dx \quad .3.3.3$$

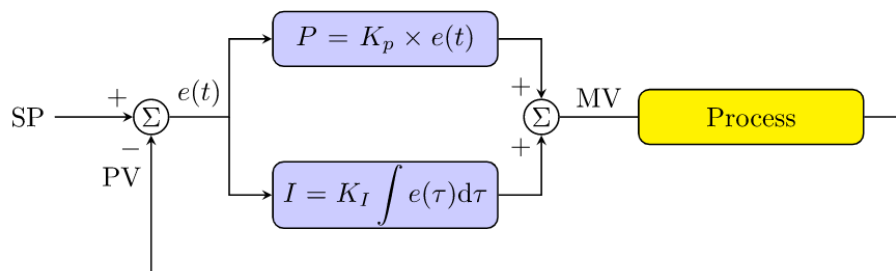
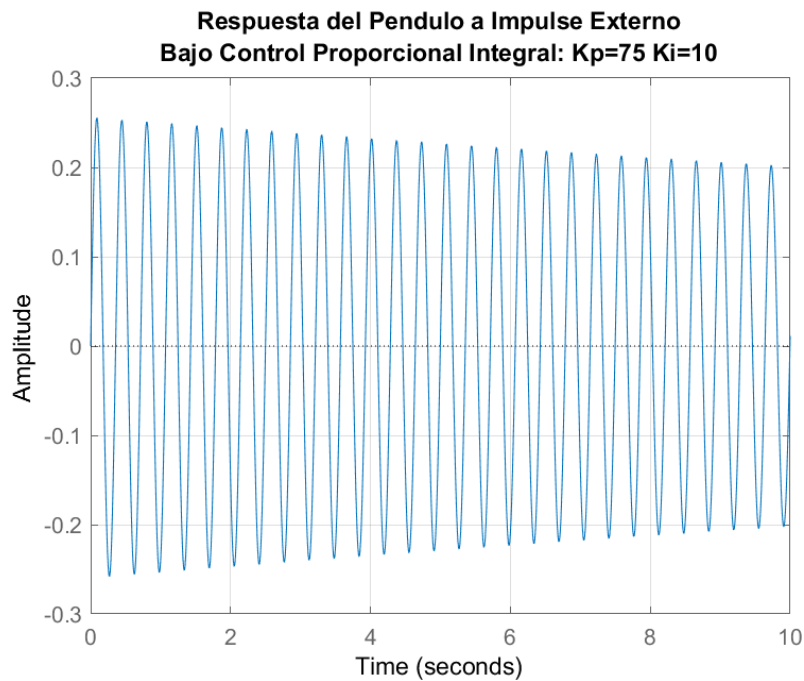


Ilustración 25: Controlador Proporcional Integrador (PI) [24]

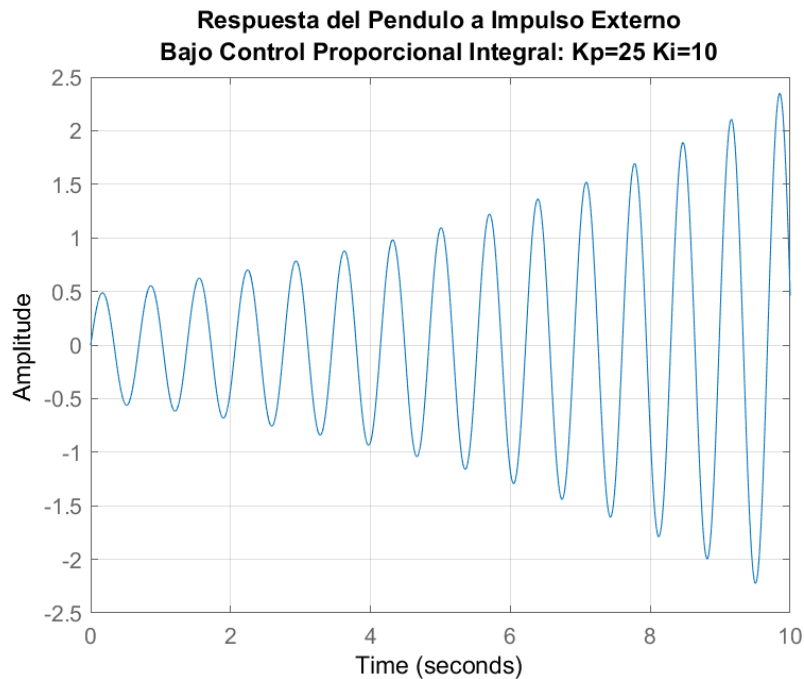
En el caso del pendulo invertido donde la inestabilidad es muy sensible a la posicion del angulo con respecto al punto de equilibrio se puede observar que con un controlador  $PI$  tampoco se logra la estabilidad ya que el control integral es susceptible al sobre paso (overshoot):





*Ilustración 26: El controlador PI reduce el error de estado estacionario, pero el sistema sigue inestable [17].*

Al comparar la ilustración 17 con la ilustración 15 se puede observar que el controlador efectivamente reduce el error de estado estacionario, pero el sistema sigue inestable. Si bien este comportamiento es parecido al anterior, señal del controlador ya está en función de dos diferentes ganancias que afectan de diferentes maneras la respuesta de la planta. Cambiando los valores de las ganancias puede resultar en un comportamiento muy diferente como en la ilustración siguiente:



*Ilustración 27: la respuesta del sistema a un controlador con una ganancia proporcional diferente es más inestable y el error de estado estacionario incrementa exponencialmente [17].*

La ilustración demuestra que a pesar de que el controlador cuenta con un control integrador y uno proporcional, el error de estado estacionario se incrementa. Para que el sistema tenga una respuesta adecuada se requiere asignarles valores específicos a las ganancias de los controladores, algo que se discutirá a continuación.

Examinando tanto el comportamiento de un controlador  $P$  como el  $PI$  se puede observar que los controladores proporcional-integrador y proporcional pueden llegar a ordenar una potencia de la planta significativamente mayor a la requerida para llegar al estado de equilibrio, estando muy cerca de la variable  $pv$ , causando que la variable controlada del sistema exceda la variable  $pv$ . En este caso el control compensa al error negativo para llegar a la estabilidad. Este fenómeno se llama sobrepaso (overshoot), y no es algo deseable en la respuesta del sistema ya que podría causar que exceda sus límites de funcionamiento o lo torne inestable e inclusive, en este caso del pendulo invertido, a ser caótico. El sobrepaso se puede regular usando un controlador que pueda medir la razón de cambio del error en el tiempo, es decir un controlador que pueda predecir el comportamiento del sistema a futuro. Este controlador se denomina un controlador derivador donde  $k_d$  es la ganancia del controlador derivador [22]:

$$u_d = k_d \cdot \frac{d}{dt} E(t) \quad .3.3.4$$

De la ecuación se puede deducir que el comportamiento de este controlador es un comportamiento modulador que modula las contribuciones de los controladores integrador y proporcional, ya que este depende directamente del comportamiento de los demás controladores. Si la planta se está aproximando rápidamente a  $pv$  eso implicaría que la función  $E(t)$  es rápidamente decreciente y por lo tanto su derivada de  $E(t)$  tiene un valor negativo grande [22].

Un controlador constituido de los tres controladores, proporcional, integral y derivador juntos es un controlador PID. Este controlador permite usar el error presente a través del control proporcional, el error del pasado con el error integral y una predicción del error del futuro para formular una función adecuada de la variable de actuación. Su función está descrita como [22]:

$$u(t) = u_p + u_i + u_d$$

$$\therefore u(t) = k_p \cdot E(t) + k_i \cdot \int_0^t E(x) dx + k_d \cdot \frac{d}{dt} E(t) \quad .3.3.5$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = k_p + \frac{k_i}{s} + sk_d = C(s)$$

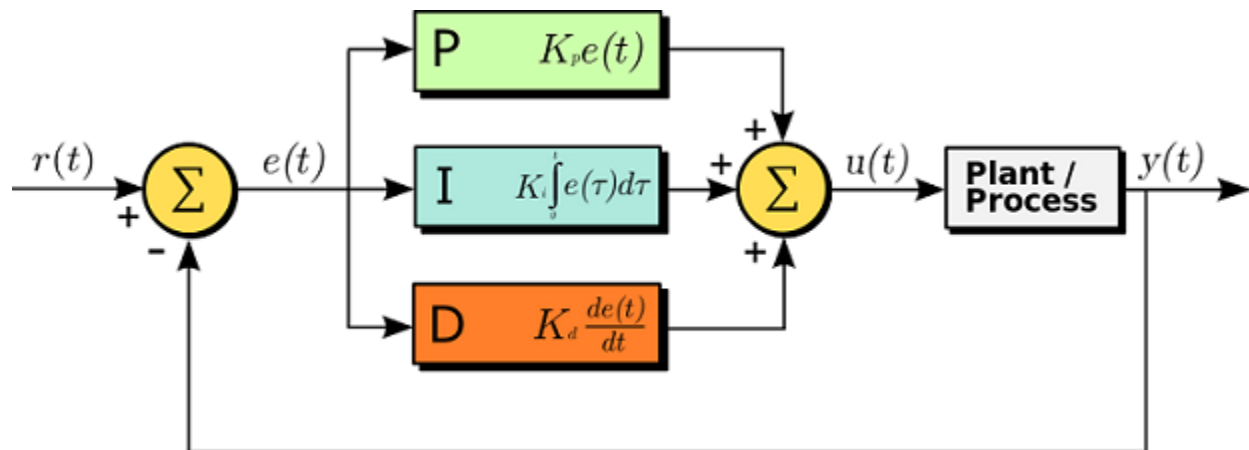
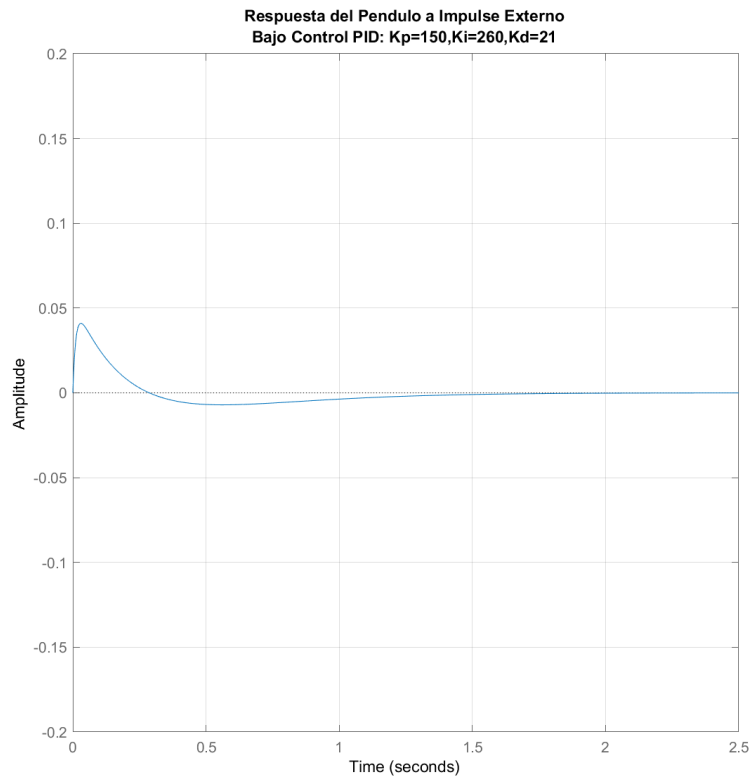


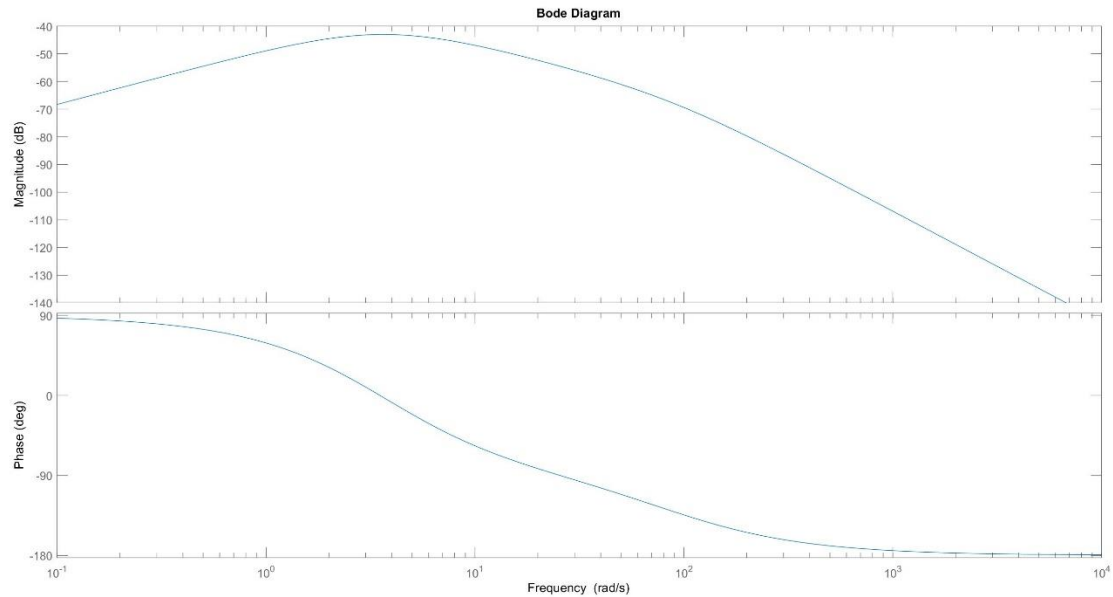
Ilustración 28: Un diagrama de bloques para un controlador PID [23]

Al agregar el control PID completo la respuesta del sistema es:



*Ilustración 29: La respuesta del sistema con un control PID es estable [17].*

En diagrama de Bode también se puede apreciar la respuesta en frecuencia del sistema:



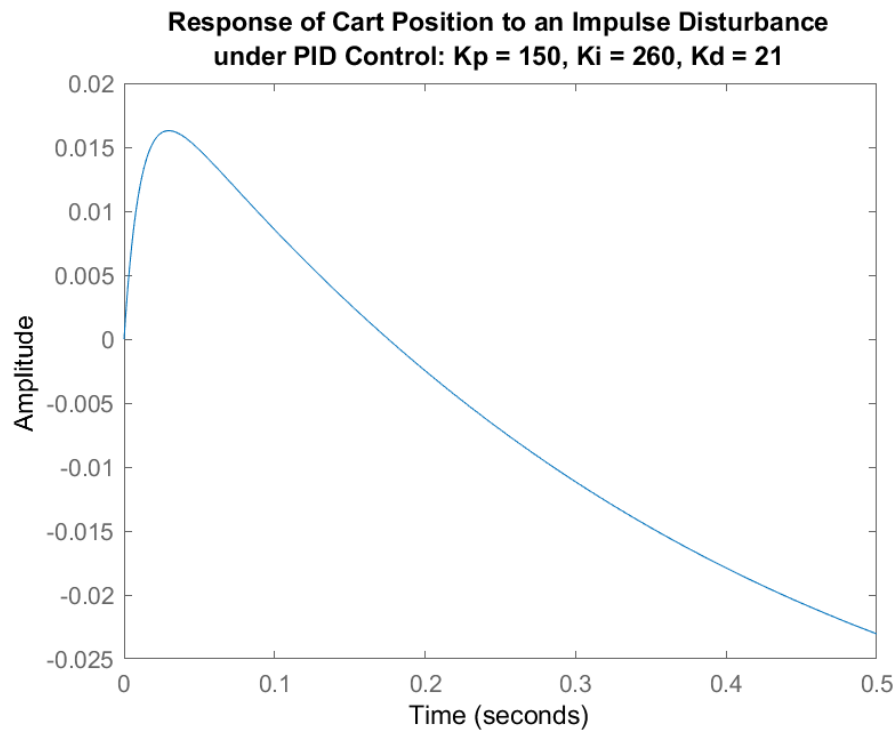
*Ilustración 30: Diagrama de Bode se puede apreciar la estabilidad del sistema*

La respuesta del sistema indica que para las frecuencias tanto bajas como altas existe una fuerte atenuación por parte del sistema. El sistema es de fase mínima ya que el control no agrega ceros en el semi plano derecho.

El sistema con un control PID cuyas ganancias  $k_p = 100$ ,  $k_i = 1$ ,  $k_d = 20$  es estable y cumple con los criterios establecidos (tiempo de estabilización  $< 0.5s$ , amplitud máxima  $< 0.05$  rad) [17]. La función de transferencia para el sistema controlado es:

$$G_1(s) = \frac{1.045 \times 10^{-5}s^2}{2.3 \times 10^{-6}s^4 + 0.00022s^3 + 0.001496s^2 + 0.002708s}$$

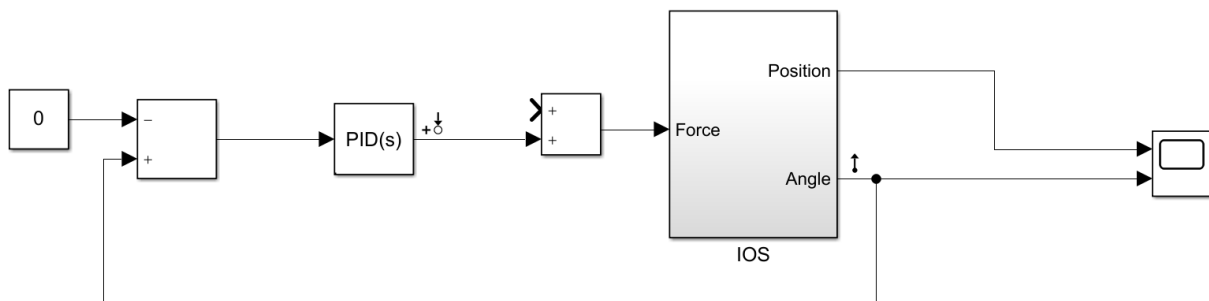
Aunque esta sea la respuesta del sistema deseada, pues únicamente se está tomando en cuenta la respuesta del péndulo sin importar lo que pase con el carro. Gráficamente a través de MATLAB se observa la ilustración:



*Ilustración 31: El desplazamiento del carro en respuesta a un impulso al péndulo del sistema [17].*

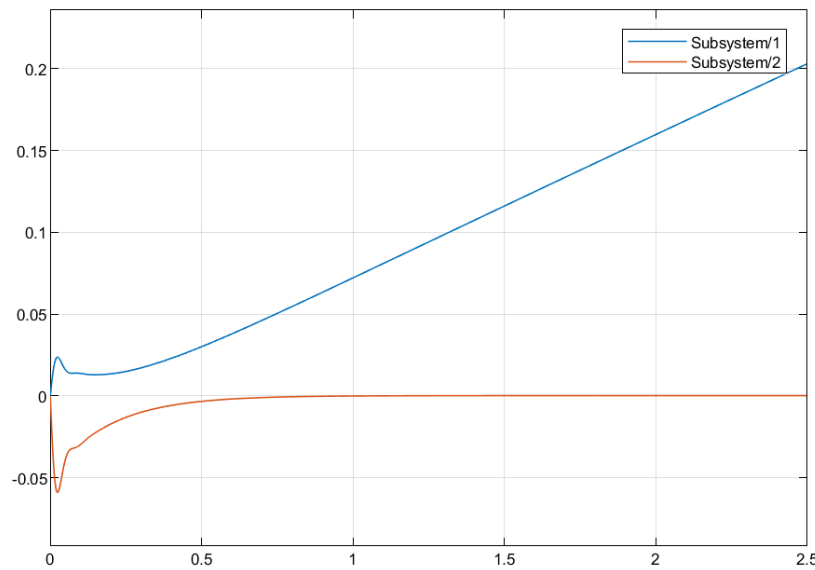
De la grafica se puede observar que a pesar de que el sistema estabiliza el angulo del pendulo, el carro tiene un desplazamiento a una velocidad constante en la direccion negativa. Esto hace que el sistema sea irrealizable en el mundo real ya que para mantener la condicion de estabilidad se requiriria de un espacio infinitamente largo [17].

De una manera similar se puede observar el comportamiento del sistema en simulink usando el sistema:



*Ilustración 32: El diagrama del sistema en Simulink donde el sistema del péndulo invertido es un subsistema con una entrada y dos salidas [17].*

Se obtiene la respuesta:



*Ilustración 33: El comportamiento es idéntico al sistema en MATLAB, pero en dirección contraria lo cual permite visualizar del comportamiento de ambas variables de estado simultáneamente [17].*

El diseñador de un sistema de control tiene que designar el valor de las coeficientes de ganancia  $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$  de acuerdo a sus necesidades. Eso se llama afinar el controlador. Si alguno de los coeficientes se coloca en cero, se anula la contribucion de ese controlador al sistema.

### 3.4. Construcción del controlador Utilizando Diagrama de Colocación de Polos

El Root Locus es un método manual para afinar los parámetros del controlador del sistema a través de la ubicación de los polos de la función de transferencia en el plano complejo. Por lo general, se utiliza este método cuando la función de transferencia es conocida y existe una variable desconocida  $k$  tal que su valor afecta la ubicación de los polos. Para que el método resulte útil se debe abordar el método a través del siguiente análisis [25]:

- ¿Qué valores para  $k$  se requieren para que el sistema sea cumpla con los criterios requeridos (razón de amortiguación, tiempo de decaimiento, frecuencia natural, etc.)?
- ¿Como la variación del parámetro desconocido  $k$  afecta el sistema?

Una forma de poder realizar este análisis satisfactoriamente y contestar las preguntas anteriores variar el valor de  $k$  iterativamente hasta cumplir con los criterios o hasta llegar a valores suficientemente altos de  $k$ . El efecto que tiene  $k$  sobre la ubicación de los polos del sistema se requiere una interpretación del plano complejo  $s$  en el cual se ubican los polos:

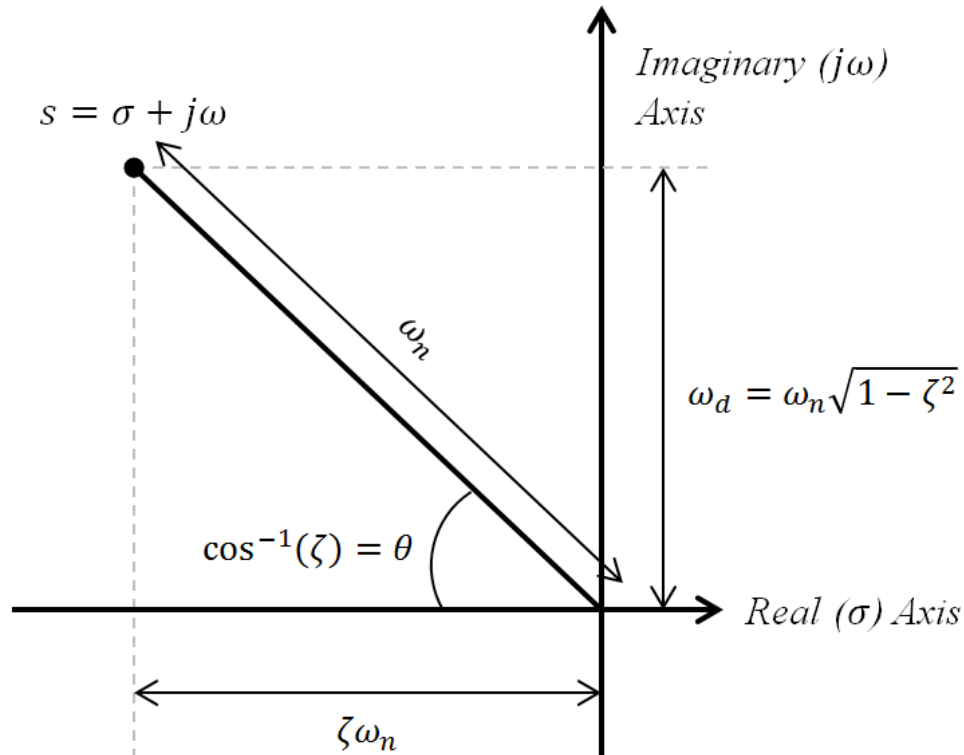
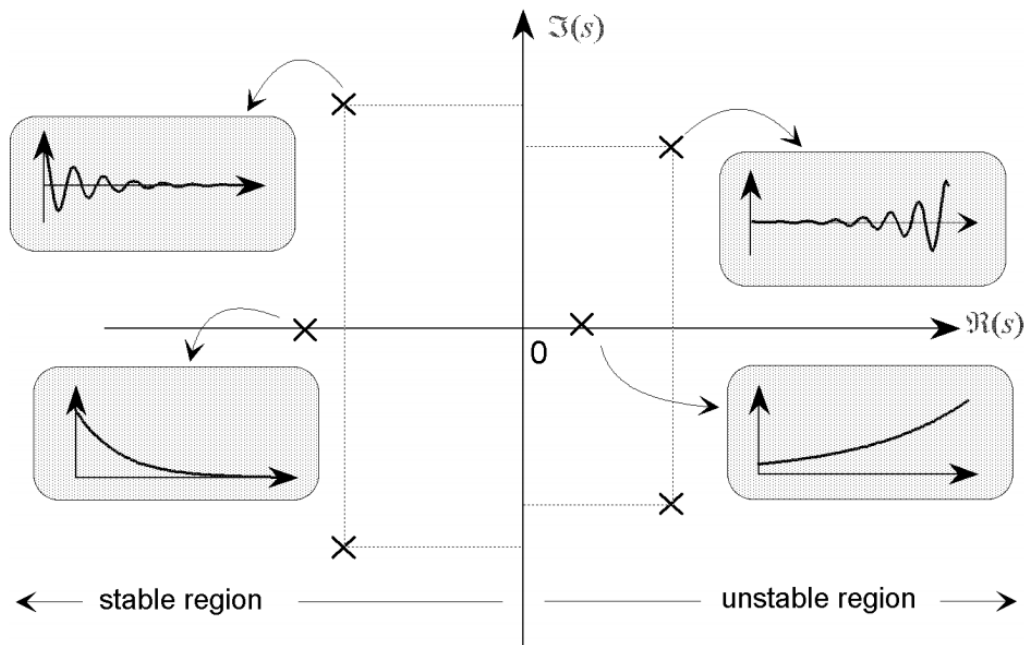


Ilustración 34: El plano complejo  $s$  con una línea de razón de amortiguación [26].

En el plano complejo  $s$  cada punto corresponde a una función de onda en el dominio del tiempo, a través de la ecuación  $e^{st}$  donde  $s = \sigma + i\omega$ . Los valores de  $s$  se mapean al dominio del tiempo  $t$  por función  $e^{st}$  por lo tanto se puede deducir que comportamiento desde el valor de la variable  $s$ . Si  $s$  es exclusivamente real  $s = \sigma + 0i$ , entonces el comportamiento del sistema es exclusivamente exponencial y decae o crece exponencialmente dependiendo del signo de  $s$ . De igual manera, si  $s$  es exclusivamente imaginario  $s = 0\sigma + i\omega$  entonces el comportamiento es exclusivamente sinusoidal con una frecuencia de oscilación  $\omega$  donde el signo afecta la fase mientras que la distancia del origen afecta la frecuencia del movimiento sinusoidal. Por lo tanto, para  $s$  complejo obtenemos una combinación de ambas funciones: una función sinusoidal modulada por una función exponencial [25] [27].





Aunque tanto los polos como los ceros de la función de transferencia son necesarios para conocer la respuesta de un sistema a una fuerza externa, únicamente las raíces del denominador (los polos), también denominada la ecuación característica del sistema ya que este caracteriza la estabilidad de este (pues las raíces en el numerador hacen que la función sea igual a cero, mientras que en el denominador una raíz implicaría dividir por cero lo cual es indeterminado), determinan el comportamiento del sistema dadas unas condiciones iniciales sin una fuerza externa (unforced response). Por lo tanto, este análisis se centra en la ubicación de los polos en el plano complejo exclusivamente [25].

Otra perspectiva para ver el plano complejo  $s$  puede ser a través de las coordenadas polares. Desde el origen se pueden dibujar unas líneas que corresponden a un valor para la razón amortiguación  $\zeta$ . La razón de amortiguación es un parámetro que para diferentes valores de  $s$  todos los valores complejos sobre una línea particular cuya magnitud corresponde a la frecuencia natural  $\omega_n$  del sistema, la amortiguación del sistema (la modulación de la respuesta oscilatoria) tendrá el mismo valor. Esta función lineal tiene un ángulo  $\theta = \cos^{-1}(\zeta)$  entre el eje  $\sigma$  y  $i\omega$ . Por lo tanto el plano complejo  $s$  también puede ser manejado en coordenadas polares cuyos puntos tienen un ángulo  $\theta$  y una magnitud  $\omega_n$  [27] [22].

Diseñar un controlador usando lo técnica de colocación de polos implica modificar la función de transferencia de tal manera que los polos del sistema queden en el lado izquierdo del plano complejo  $s$  para que pueda tener un decaimiento ante una fuerza externa. Es conveniente tener

la función de transferencia en la forma (se obtiene agrupando los valores  $ks$  de la función de transferencia y luego dividiendo por los valores que no tienen el factor  $k$ ) [25]:

$$tf = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

$$P(s) + kQ(s) = 0$$

Donde  $P(s)$  es el polinomio característico y  $Q(s)$  son los ceros de la función de transferencia. A medida que  $k \rightarrow 0$  se observa que  $P(s) = 0$ , lo cual son los ceros de lazo abierto. Cuando  $k \rightarrow \infty$  se observa que  $Q(s)$  es el valor dominante, obteniendo los ceros de lazo cerrado. Se puede deducir del comportamiento de  $k$ , comparando con la ecuación (73) que es la ganancia del sistema. Existen reglas para determinar el comportamiento de los polos y los ceros con los cuales se diseñará el sistema y posteriormente determinar el valor de la ganancia  $k$  [25]:

- i. En el diagrama de polos habrá un número de líneas equivalente al número de polos o ceros, dependiendo de cuál sea mayor.
- ii. A medida que  $k \rightarrow \infty$  los polos se mueven hacia los ceros, demarcando polos de lazo cerrado en su trayectoria. Esto explica la regla 1, ya que los polos de lazo cerrado se forman entre pares de polos y ceros. Las líneas de los polos solos (no tienen pareja) se van hacia un cero en el infinito, las líneas de los ceros solos vienen desde un polo en el infinito. (Esto es una fuente de inestabilidad).
- iii. Los ceros y polos complejos aparecen en pares conjugados.
- iv. Las líneas divergen del plano complejo a ángulos rectos del eje  $\sigma$ . Se mueven a través de asíntotas que tienen ángulos dados por la fórmula [25]:

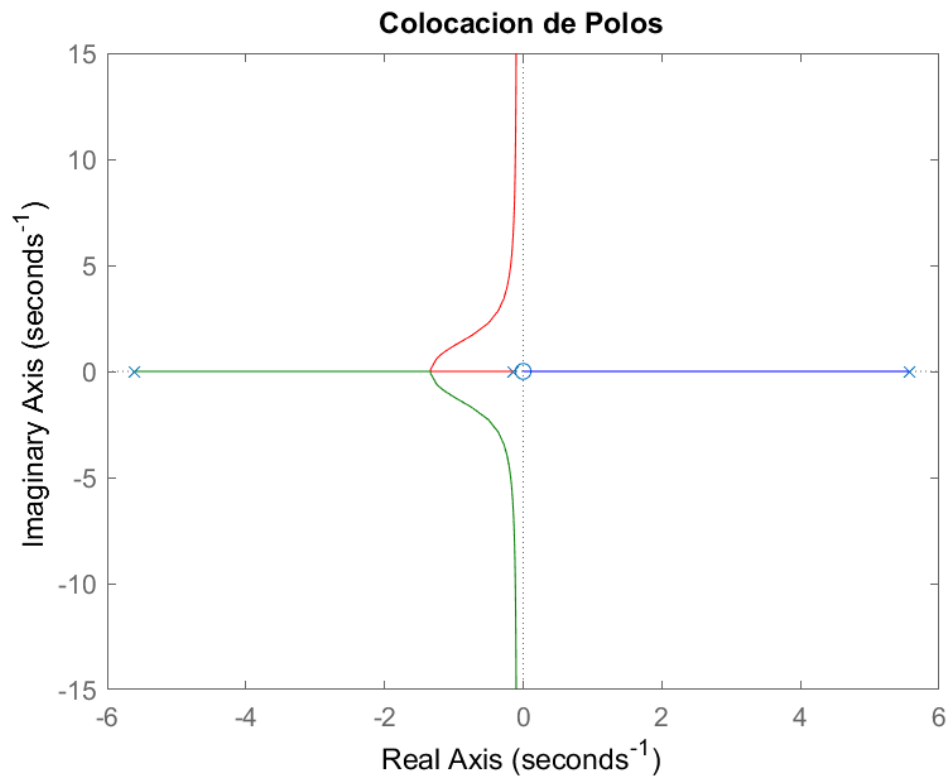
$$\Phi_A = \frac{2q + 1}{n - m} \times 180^\circ$$

El punto donde las asíntotas se cruzan este dado por [25]:

$$c = \frac{\sum n - \sum m}{n - m}$$

Donde  $q = n - m - 1$  y  $n$  es el número de polos y  $m$  es el número de ceros.

Observando la ubicación de los polos del sistema del péndulo invertido (71) tienen el siguiente diagrama de polos hallado usando MATLAB [17]:



*Ilustración 35: El diagrama de Root Locus para el sistema del péndulo invertido. [17]*

Es necesario eliminar el cero en el origen para poder pasar el lugar del polo en lado derecho al lado izquierdo y estabilizar el sistema. Se puede eliminar el polo como en 5.7.6 agregando un integrador de la forma  $\frac{1}{s}$  para obtener [17]:

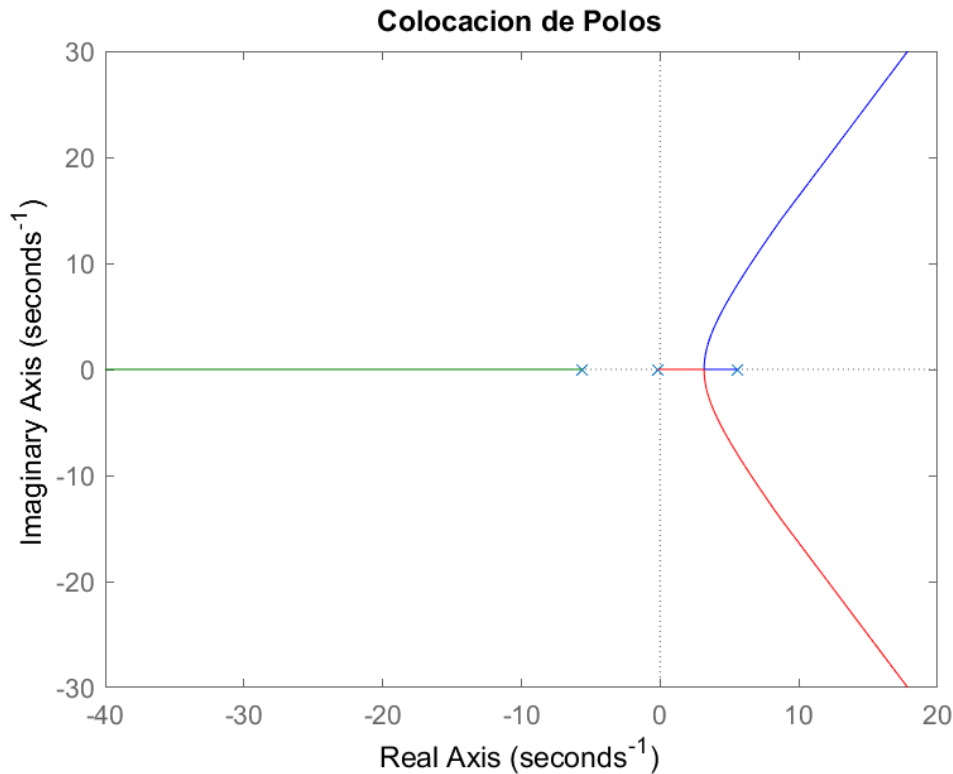


Ilustración 36: Al eliminar el cero en origen usando un integrador, los polos dominantes salen hacia el lado derecho

En la ilustración 32 se puede observar que al eliminar el cero en el origen uno queda con 3 polos de los cuales 2 dos son dominantes y salen hacia el lado derecho. Se puede pasar los polos al lado derecho colocando ceros reales. Se puede calcular el lugar de los ceros utilizando los criterios establecidos previamente para la estabilidad del sistema [28]:

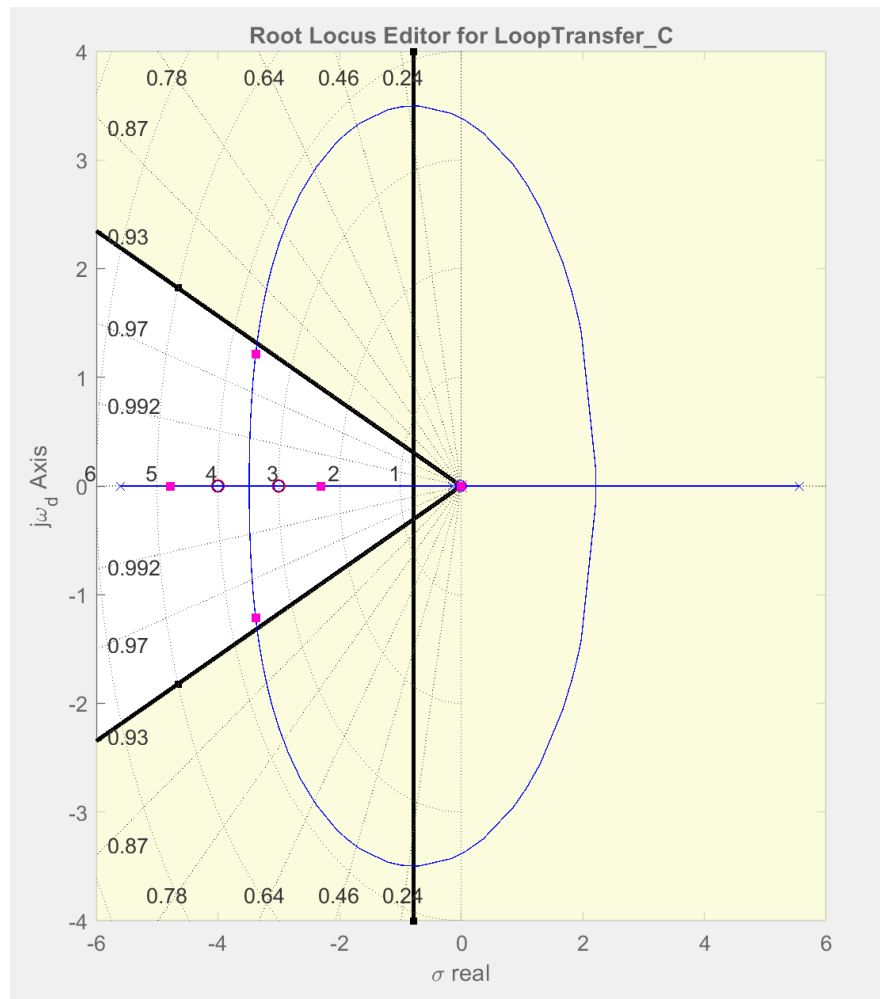
$$T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

$$\therefore \zeta \omega_n \approx \frac{4}{5}$$

Escogiendo una razón de amortiguación  $\zeta \approx 0.95$  asegura que el péndulo no se vaya a desplazar más de  $\theta = 0.05$  rad. Como  $\zeta$  es el coseno de  $\theta$  y  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , entonces los valores de  $\zeta$  son negativos:

$$\therefore \omega_n \approx -\frac{4}{4.75} \qquad \therefore \omega_n \approx -0.824$$

Por lo tanto, para que el criterio de tiempo de estabilización se cumpla, es necesario que los ceros reales se coloquen a la izquierda de  $\sigma = -0.824$ . Se agregan 2 ceros uno en  $\sigma = -3$  y el otro en  $\sigma = -4$  para obtener el diagrama de polos [25] [17]:



Combinando los criterios del sistema tiempo de estabilización  $T_s$  y de amortiguación  $\zeta$  se pueden hallar sobre el grafico las raíces específicas de lazo cerrado para que el sistema compensado cumpla con los criterios. Utilizando el inverso de Pitágoras [27] [28]:

$$j\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\therefore j\omega_d = \pm 1.2i$$

Que corresponde a la ubicación (donde se cruza con el diagrama):

$$p = -3.38 \pm 1.2i$$

El valor de  $k$  correspondiente a este punto se puede hallar analíticamente desde la ecuación [27]:

$$C(s) = k \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}$$

$$\therefore k = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}$$

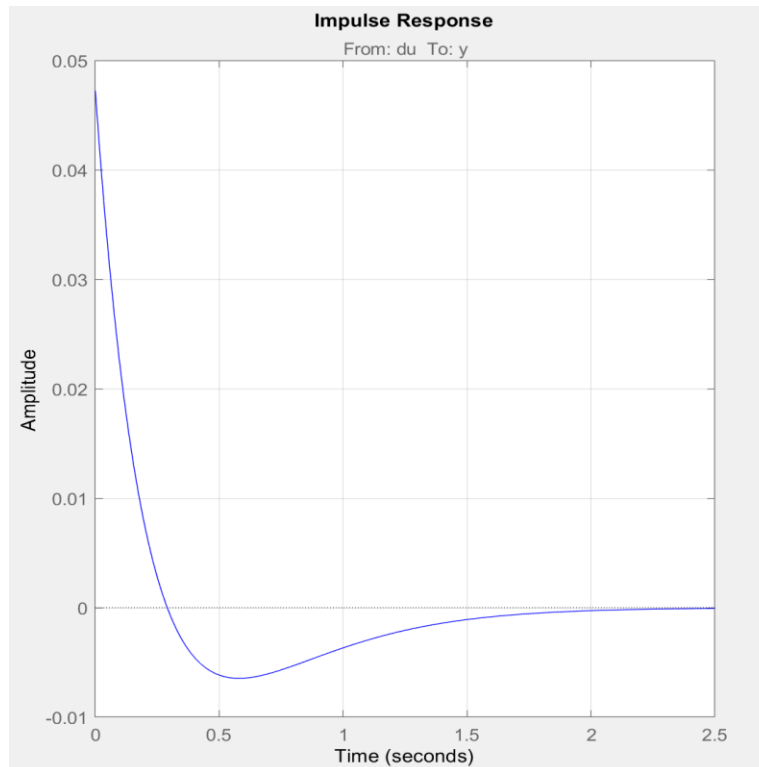
En esta tesis el valor de  $k = 260$  fue hallado usando la aplicación de MATLAB Control System Designer. Resolviendo para los coeficientes correspondientes de  $C(s)$  en paralelo:

$$C(s) = 260 \frac{(1 + 0.33s)(1 + 0.25s)}{s}$$

$$\therefore C(s) = 150.8 + 21.45s + \frac{260}{s}$$

$$\therefore K_p = 150.8 ; K_i = 260 ; K_d = 21.45$$

La respuesta del sistema compensado a un impulso:



*Ilustración 37: La respuesta es satisfactoria, indicando que el sistema compensado es equivalente a asignando ganancias se aproxima al PID descrito anteriormente.*

Un controlador PID idealmente puede controlar un sistema cuyo comportamiento es lineal y su planta siempre obedece las ordenes del controlador, pero en la realidad muchos sistemas no se comportan de esa manera, podemos observar que algunos sistemas tienden a comportarse de manera lineal hasta cierto punto a partir del cual su comportamiento no es lineal. El este comportamiento se llama saturacion, pues la planta no puede incrementar el valor de la variable controlada y por lo tanto se requiere modificar el controlador para poder controlar efectivamente la planta del sistema.

Este fenomeno se puede manifestar en el controlador del pendulo invertido, si el estado inicial  $\theta(0) \neq 0$  se mantiene durante un periodo de tiempo sin disminuirse (puede ser atraves de sujetar fisicamente al pendulo) pues el controlador integrador le esta llegando una señal de error  $e(t)$  de un valor constante, esto hace que le controlador ordene incrementar la potencia de una manera continua hasta que (si se mantiene sujetado el pendulo suficiente tiempo) el integrador causara que la planta actue a maxima potencial, antes o durante el movimiento del pendulo hacia el punto de equilibrio  $sp$ . Esto hace que en algun momento antes de llegar a  $sp$ , el controlador integrador este pidiendo una potencia de la planta mayor a su capacidad. Si se supone que la planta (el motor del carro) ignora la orden de exceder su capacidad de potencia, pues el sistema va a tener un overshoot mucho mayor al que esta programado ya que necesitaria un error negativo significativamente mayor para compensar la funcion  $u_i(t)$ . Este fenomeno se llama devanado del integrador (integrator winding [22]) lo cual para el pendulo invertido es una fuente de inestabilidad.

La devanacion del integrador se puede evitar usando una tecnica de anti-devanacion que se llama reprimicion (clamping) [22]. La tecnica consiste en implementar un circuito dentro del controlador que permita desactivar el integrador cuando este de una orden que saturaria a la planta. La señal de actuacion del PID pasa por dos chequeos antes de llegar a la planta: el primer chequeo es un circuito que compara el valor de la señal de actuacion con el valor de saturacion (por lo general un valor cerca menor que el valor exacto de la saturacion). Esto se logra comparando los valores antes y despues del cicuito de chequeo de saturacion. Si los valores son diferentes, no hay saturacion. Si los valores son iguales, el sistema puede estar en saturacion. El segundo chequeo el circuito compara el signo (positivo o negativo) de la señal de actuacion y la compara con la señal de error  $E(t)$ , si los signos son iguales, el sistema esta efectivamente en saturacion, si son opuestas, el sistema no esta en saturacion.

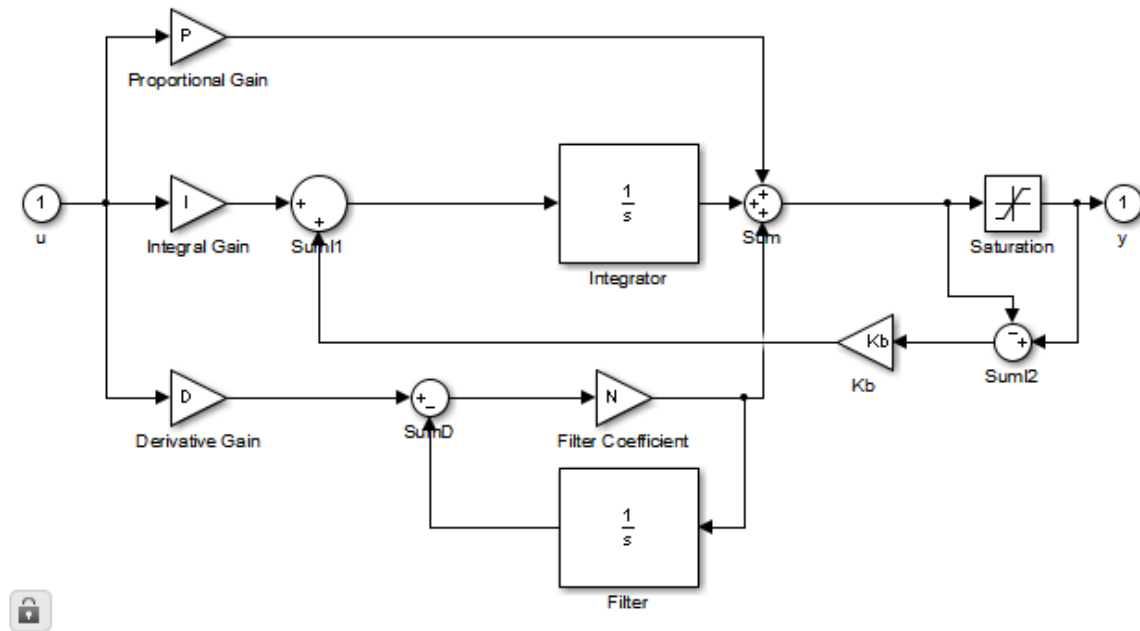


Ilustración 38: Un diagrama de un controlador con sistema anti-devanación "clamping". [22]

Otra fuente de inestabilidad para el control PID es causada por el ruido generado por el proceso de transduccion durante la realimentacion de la señal controlada [22]. La señal controlada no siempre es una señal que puede ser comparada directamente con la variable ordenada  $s_p$ , y por lo tanto es necesario pasarla por un transductor (ej. sensor) que por lo general siempre agrega ruido a la señal. El ruido es perjudicial para cualquier medicion ya que altera el valor real de la señal. El ruido puede estar localizado en ciertas frecuencias o estar distribuido en todo el espectro. Por lo general, la señal util es de una frecuencia menor y potencia mayor a comparacion con el ruido. Es importante tomar en cuenta la frecuencia del ruido ya que el controlador derivador tiene una respueste en funcion de la frecuencia.

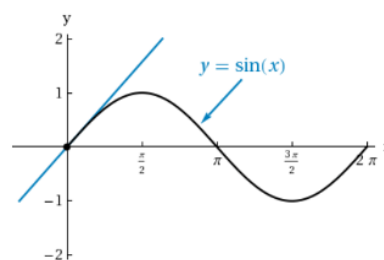


Ilustración 39: Línea tangente en el origen para frecuencia igual a 1 [29]



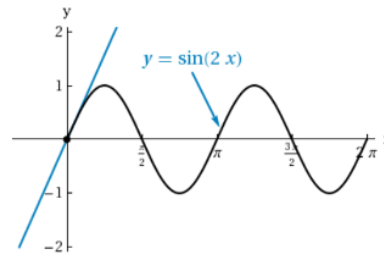


Ilustración 40: Línea tangente en el origen para la frecuencia igual a 2 [29]

Para contrarrestar el efecto del ruido se hace necesario separar la señal saliente del transductor por frecuencias y eliminar la señal en las frecuencias donde la amplitud del ruido es similar a la de la señal realimentada. Esto se logra con un filtro [22].

Un ejemplo de filtro, el filtro pasa-bajo, es un filtro que deja pasar todas las frecuencias debajo de una frecuencia en particular  $\omega$  (también denominada frecuencia de corte) [22] donde  $s$  es la derivada en el dominio de la transformada de Laplace. Si se divide el numerador y el denominador por  $\omega$  vamos a tener:

$$f(\omega) = \frac{\omega}{s + \omega}$$

Dividiendo el numerador y denominador por  $\omega$

$$\therefore f(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{\omega}s + 1}$$

$\tau$  es el inverso de la frecuencia [22]

$$\therefore f(\tau) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

Por lo tanto, el filtro puede ser agregado al controlador como un filtro con función en  $\tau$  o  $\omega$  [22] se obtiene la señal de salida:

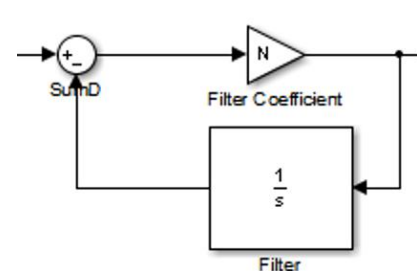


También puede ser agregado como un realimentador al controlador derivador como en la ilustración. Esta señal realimentada pasa por un integrador. Esta solución se puede deducir desde la algebra de bloques:

Con algebra de bloques se pueden reducir los bloques de el coeficiente  $N = \omega$  y el derivador  $\frac{1}{s}$  a un bloque [22]:

$$\frac{s\omega}{s+\omega} = \frac{1}{1+\omega\frac{1}{s}}$$

La cual es equivalente a la filtrada pasada por el derivador.



*Ilustración 41: Diagrama de un filtro derivador integrado a un controlador donde  $N$  es la frecuencia de corte [22].*

## 4. Contextualización Sobre El Cálculo Fraccionario

El cálculo diferencial fue inventado principalmente por dos matemáticos simultáneamente. Isaac Newton y Gottfried Leibniz introdujeron el concepto de la derivada enésima (de orden  $n$ ). La derivada enésima implica aplicar la derivada de manera sucesiva un  $n$  número de veces. Esta noción en su momento de concepción durante el siglo XII era significativa y coherente. En 1695, el matemático francés L'Hopital le pregunto a Leibniz acerca de la posibilidad de que el número de operaciones sucesivas  $n$  fuera un numero diferente a un entero, como  $\frac{1}{2}$ , por ejemplo. Leibniz le contesto “esto llevaría a una paradoja de la cual, algún día, consecuencias útiles se derivarán” [30]. Serian varios siglos antes de que la historia le diera la razón.

Existen dos maneras de interpretar la expresión  $\frac{d^n f}{dt^n}$  [30](1), la primera es la interpretación que se aprende en el cálculo básico: es la función obtenida después de diferenciar la función  $f$  un  $n$  número de veces. La segunda es más sutil: se interpreta la expresión como un operador que actúa sobre la función  $f(t)$  cuyo resultado depende del parámetro  $n$  [1]. La pregunta de L'Hopital era sobre el comportamiento de este operador generalizado al caso donde  $n \notin \mathbb{N}$  (es diferente a un entero). Teniendo en cuenta el teorema fundamental del cálculo, esta interpretación se extiende a cobijar tanto la diferenciación como la integración como dos transformaciones que toman la función  $f$  y la transforman a una nueva función. Se concluye que los operadores del cálculo fraccionario son operadores que continuamente transforman  $f$  a su enésima derivada o antiderivada.

Definición: La función Pi y Función Gamma: Para  $a \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \geq 0$  [31]:

$$\Pi(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} \cdot dt = \alpha!$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \cdot dt = (\alpha - 1)! \quad .4.1$$

Definición [32]: La función Beta: Para  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $x, y \geq 0$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1 - t)^{y-1} \cdot dt$$

$$\therefore B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \quad .4.2$$

$$\therefore B(y, x) = \frac{\Gamma(y) \cdot \Gamma(x)}{\Gamma(y + x)}$$

$$\therefore B(x, y) = B(y, x)$$

### 4.3. Discusión Sobre Los Operadores Del Cálculo Fraccionario

La definición de la derivada (en dirección negativa):

Definición de (1) [33]: 
$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h} \quad .4.3.1$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x - h)}{h} \quad .4.3.2$$

Reemplazando  $x$  en 4.3.1 por  $(x - h)$  [33]:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h} \rightarrow f'(x - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - h) - f(x - 2h)}{h}$$

Reemplazando  $f'(x)$  en 4.3.2 por  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x - h)}{h}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(x - h)}{h} - \frac{f(x - h) - f(x - 2h)}{h}}{h} \\ &\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h)] \end{aligned}$$

Si se sigue el procedimiento iterativamente:

$$\frac{d^3}{dx^3} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} [f(x) - 3f(x - h) + 3f(x - 2h) - f(x - 3h)]$$

Se puede observar un patrón que se asemeja a la expansión binomial. La  $n$ -ésima derivada puede ser escrita como [33]:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h}\right)^n \cdot \sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot \binom{n}{l} \cdot f(x - lh) \quad .4.3.3$$

La expresión representa una definición para cualquier derivada de orden  $n \in \mathbb{N}$ . Para llegar a un operador que generalice la definición de la derivada necesitamos mapear el coeficiente  $n$  a el conjunto de números reales. Usamos el coeficiente  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

Dado que el coeficiente binomial es:

$$\binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$$

La extensión analítica del coeficiente binomial al dominio de  $\mathbb{R}$  con la función gamma  $\Gamma(\alpha)$  y para el resto de la expresión  $n \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}^+$  [33]:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h}\right)^\alpha \cdot \sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{l! \Gamma(\alpha+1-l)} \cdot f(x-l \cdot h) \quad .4.3.4$$

De la definición del límite “retraso” se tiene que  $h$  y por extensión  $n \cdot h$  dentro de la sumatoria representan una diferencia entre el valor de la función en  $x$  y su valor en un valor evaluado menor cercano al valor  $x$ , denominado aquí como  $a$ , y cumpliendo  $x \neq 0$ , se tiene:

$$n \cdot h = x - a$$

$$\therefore h = \frac{x-a}{n}$$

$$\therefore \frac{1}{h} = \frac{n}{x-a}$$

$$\therefore n = \frac{x-a}{h}$$

Despejando, se tiene la derivada de Grünwald-Letnikov (GL) de orden fraccionario, definida como [33]:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{n}{x-a}\right)^\alpha \cdot \sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{l! \Gamma(\alpha+1-l)} \cdot f\left(x-l \cdot \frac{x-a}{n}\right)$$

$$\therefore D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{n}{x-a}\right)^\alpha \cdot \sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot \binom{\alpha}{l} \cdot f\left(x-l \cdot \frac{x-a}{n}\right) \quad .4.3.5$$

Cambiando  $\alpha$  por  $-\alpha$ , se obtiene un coeficiente binomial negativo que resulta en la expresión integral para el operador GL [33]:

$$\begin{aligned} D^{-\alpha}f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{n}{x-a}\right)^\alpha \cdot \sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot \binom{-\alpha}{l} \cdot f\left(x - l \cdot \frac{x-a}{n}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{n}{x-a}\right)^\alpha \cdot \sum_{l=0}^n \frac{\Gamma(\alpha+l)}{l! \Gamma(\alpha)} \cdot f\left(x - \frac{l}{n} \cdot (x-a)\right) \end{aligned} \quad .4.3.6$$

Dado que puede observar que la expresión anterior se parece a una suma de Riemann tomando en cuenta que  $h = \frac{(x-a)-0}{n}$  donde los límites de la suma integral son  $a = (x-a)$  y  $b = 0$  por lo tanto  $h$  ressemble el termino  $\Delta x$  en la suma de Riemann. [33]

$$\therefore D^{-\alpha}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \cdot \sum_{l=0}^n \frac{\Gamma(\alpha+l)}{l! \Gamma(\alpha)} \cdot f(x-lh) \cdot h \quad .4.3.7$$

Para  $\alpha = 1$  en 4.3.7 la expresión resultante es:

$$\Gamma(\alpha+l) = \Gamma(1+l) = l! \quad \Gamma(1) = 0! = 1 \quad \therefore \frac{\Gamma(1+l)}{l! \Gamma(1)} = 1$$

$$D^{-1}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{l=0}^n f(x-lh) \cdot h$$

Al aplicar el límite se obtiene la integral:

$$D^{-1}f(x) = \int_0^{x-a} f(x-t) \cdot dt$$

Realizando una sustitución  $u = x - t$  tal que  $x \in \mathbb{R}$  y evaluando los límites de la integral:

$$u = x - t \rightarrow du = -dt$$

$$t = 0 \rightarrow u = x \quad t = x - a \rightarrow u = a$$

$$\therefore D^{-1}f = \int_x^a f(u) \cdot -du \rightarrow D^{-1}f = \int_a^x f(u) \cdot du$$

Se puede observar que al tomar valores negativos de  $\alpha$  en 4.3.5 se obtiene una integral, por lo tanto para  $\alpha = 2$  la expresión 4.3.7 da:

$$\Gamma(\alpha + l) = \Gamma(2 + l) = (l + 1)! \quad \Gamma(2) = 1 \quad \therefore \frac{\Gamma(2+l)}{l!\Gamma(2)} = (l + 1)$$

$$D^{-2}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \cdot \sum_{l=0}^n (l + 1) \cdot f(x - lh)$$

Se opera la expresión para obtener una integral de la siguiente manera:

$$D^{-2}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \cdot \sum_{l=0}^{n+1} l \cdot f(x - lh) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{n+1} (lh) \cdot f(x - lh) \cdot h$$

$$l \cdot h \rightarrow t \quad h = \Delta x$$

$$\therefore D^{-2}f(x) = \int_0^{x-a} t \cdot f(x - t) \cdot dt$$

$$u = x - t \rightarrow D^{-2}f(x) = 1 \cdot \int_a^x (x - u) \cdot f(u) \cdot du$$

De una manera similar, para  $\alpha = 3$  se puede deducir la expresión resultante. Tomando en cuenta que:

$$\frac{\Gamma(3 + l)}{l!\Gamma(3)} = \frac{1}{2!}$$

$$\therefore D^{-3}f(x) = \frac{1}{2!} \int_a^x (x - u)^2 \cdot f(u) \cdot du$$

De nuevo para  $\alpha = 3$  se tiene:

$$\frac{\Gamma(4 + l)}{l!\Gamma(4)} = \frac{1}{3!}$$

$$\therefore D^{-4}f(x) = \frac{1}{3!} \int_a^x (x - u)^3 \cdot f(u) \cdot du$$

Se puede deducir una expresión general, que para  $\alpha = k \in \mathbb{N}$ . Esta expresión se llama la integral de Cauchy la cual es equivalente a una integral iterada  $k$  veces. Se puede hacer la extensión analítica  $k \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$  usando la función  $\Gamma(\alpha)[1]$ :

$$D^{-(k)}f(x) = \int_a^x \int_a^t \cdots \int_a^{u_{k-1}} f(u_k) \cdot du_k \cdots du_2 \cdot du_1$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} \cdot f(t) \cdot dt$$

$$\therefore D^{-(k+1)}f(x) = \frac{1}{k!} \int_a^x (x-u)^k \cdot f(u) \cdot du \rightarrow \therefore D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} \cdot f(u) \cdot du$$

El operador diferencial cumple la equivalencia  $D^{-\alpha} = I^{\alpha}$  de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo. Entonces [30]:

$$I^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} \cdot f(u) \cdot du$$

Este operador es denominado el operador de Riemann-Liouville (RL) de izquierda, y es válido para  $\forall x \in \mathbb{R}$  tal que  $x > a$ .

Ejemplo:  $I^{1/2}(x^3)$  para  $x \in [0,1]$  [33]:

$$I^{1/2}(x^3) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^1 (1-t)^{-1/2} \cdot t^3 \cdot dt$$

La integral se puede suprimir usando la función Beta (3):

$$I^{1/2}(x^3) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^1 t^{4-1} \cdot (1-t)^{1/2-1} dt \rightarrow I^{1/2}(x^3) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \cdot B(4, 1/2)$$

$$\therefore I^{1/2}(x^3) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \cdot \frac{\Gamma(4) \cdot \Gamma(0.5)}{\Gamma(4+0.5)} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4.5)} = \frac{3!}{\Gamma(9/2)}$$

$$\therefore I^{1/2}(x^3) = \frac{32}{35\sqrt{\pi}}$$

Se puede observar que las propiedades del operador (RL) [11]:

1.  $I^{\alpha}c \cdot f(x) = c \cdot I^{\alpha}f(x)$
2.  $I^{\alpha}f(x) \cdot g(x) = I^{\alpha}f(x) \mp I^{\alpha}g(x)$
3.  $I^{\alpha}f(x) \cdot I^{\beta}f(x) = I^{\alpha+\beta}f(x)$

Corolario: Para que  $I^{\alpha}$  y  $D^{\alpha}$  sean definidos de orden fraccionario, únicamente se necesita que  $\alpha \in (0,1)$ .



El operador de diferenciación fraccional Riemann-Liouville se puede construir usando el teorema fundamental del cálculo en combinación con lo establecido del operador integral fraccionario. Al actuar un operador de derivada convencional sobre el operador fraccionario, quedamos con la parte fraccionaria del parámetro  $\alpha$  y consecuentemente con el operador derivador fraccionario donde  $[\alpha]$  función techo de  $\alpha$ . [30]

$$D^\alpha f = \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} (I^{[\alpha]-\alpha} f) \quad .4.3.8$$

La expresión anterior la podemos expandir para obtener el operador diferencial de forma integral [30]:

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma([\alpha] - \alpha)} \cdot \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} \int_0^x (x-t)^{[\alpha]-\alpha-1} \cdot f(t) \cdot dt \quad .4.3.9$$

Se puede apreciar una diferencia importante entre el operador convencional y el operador fraccionario al observar la expresión con respecto a los terminales o límites de la integral. Mientras que el resultado de la evaluación del operador convencional depende únicamente del valor del punto evaluado, el operador fraccionario toma la integral de varios valores definidos en los límites de integración de este. Esta propiedad es denominada la no-localidad, y es una de las principales áreas de interés relacionadas con los operadores fraccionarios ya que permite evaluar sistemas cuyo comportamiento depende de más variables que las de tiempo y posición dando como resultado varios fenómenos como los efectos de memoria. Un ejemplo de un efecto de memoria puede ser un componente de un circuito electro que no es óhmico, como un bombillo, cuya resistencia eléctrica cambia con respecto a la temperatura además del voltaje [11].

En la expresión anterior 4.3.9, en el cual el límite inferior de la integral es cero es usada bastante para evaluar sistemas físicos donde el tiempo es la variable dependiente y por lo general se comienza a evaluar en  $t = 0$ . La forma más general del operador sería [30]:

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma([\alpha] - \alpha)} \cdot \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} \int_a^x (x-t)^{[\alpha]-\alpha-1} \cdot f(t) \cdot dt$$

Cuyas propiedades se pueden resumir como [11]:

$$D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma([\alpha] - \alpha)} \cdot \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} \int_a^x \frac{f(t) \cdot dt}{(x-t)^{\alpha+1-[\alpha]}} & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dicho lo anterior, se podría evaluar el significado de invertir los límites de integración del operador fraccionario, eso resultaría en la integral R-L derecha, la cual no tiene mucha utilidad ya que describe un sistema cuyo estado actual depende de un estado futuro, en vez de un estado anterior como esta descrito en la expresión anterior.

Obteniendo tanto los operadores fraccionarios de derivación e integración, se puede aprovechar la notación para construir un solo operador, el operador diferintegral  $\mathcal{J}$  que usa el mismo parámetro fraccionario  $\alpha$ , y tiene las siguientes propiedades al actuar sobre la función  $f$  [30] [11]:

$$\mathcal{J}^\alpha f = \begin{cases} D^\alpha f & \alpha > 0 \\ f & \alpha = 0 \\ I^{|\alpha|} f & \alpha < 0 \end{cases}$$

También se puede deducir que la transformada de Laplace para el operador fraccionario Riemann-Liouville es [11] tomando en cuenta la definición en 2.3.2:

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} s^k [D^{\alpha-[\alpha]-1} f(t)]_{t=0} \quad .4.3.10$$

Es posible usando la integral de Riemann-Liouville hallar integrales de orden fraccionario. Pero los diferenciales de orden fraccionario halladas por la definición RL no tienen utilidad ya que no existe una interpretación física para dicho resultado [11] [2], esto significa que la transformada de Laplace para funciones derivadas de orden fraccionario no puede ser utilizada para la solución de ecuaciones diferenciales. Michael Caputo en 1967 define un operador fraccionario alternativo que permite evaluar las condiciones iniciales. La diferencia entre ambas expresiones se puede abordar desde la composición de operadores [2].

$$D_*^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma([\alpha] - \alpha)} \int_a^x \frac{f^{([\alpha])}(t) \cdot dt}{(x - t)^{\alpha+1-[\alpha]}}$$

**Nota:** En esta tesis,  $D_*^\alpha$  es el derivador fraccional de Caputo de orden  $\alpha$ . La notación en algunos textos utiliza subíndices izquierdos para determinar los límites de integración o terminales. En esta tesis se utilizará siempre el límite inferior como 0 por conveniencia. [34] [2]

$$D_*^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma([\alpha] - \alpha)} \int_a^x \frac{f^{([\alpha])}(t) \cdot dt}{(x - t)^{\alpha+1-[\alpha]}} \leftrightarrow n - 1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \leftrightarrow \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\therefore D_*^\alpha f(x) = \mathcal{J}^{[\alpha]-\alpha} D^{([\alpha])} f(x) \quad .4.3.11$$

La expresión es equivalente a la diferenciación enésima y luego la integral de orden  $(n - \alpha)$ . Esto permite que la derivada  $f^{[\alpha]}$  sea nula cuando  $f$  sea constante. De la ecuación 4.3.11 se puede observar la diferencia con el operador diferencial fraccionario RL [11]:

$$D^\alpha f(x) = D^{[\alpha]} J^{[\alpha]-\alpha} f(x) \quad .4.3.12$$

El teorema fundamental del cálculo demuestra que para  $\forall \alpha \neq 0$  los operadores de integración y derivación no conmutan [11]:

$$\begin{aligned} D^\alpha (I^\alpha f(x)) &\neq I^\alpha (D^\alpha f(x)) \\ \therefore D_*^\alpha f(x) &\neq D^\alpha f(x) \end{aligned} \quad .4.3.13$$

La transformada de Laplace para el operador de Caputo se puede deducir  $\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(x)\}$  [11]:

$$\begin{aligned} \text{En (12) } g(x) &:= D^{[\alpha]} f(x) \quad \therefore D_*^\alpha f(x) = J^{[\alpha]-\alpha} g(x) \quad \text{Y ahora: } \mathcal{L}\{D^{[\alpha]} f(x)\} = \\ &\mathcal{L}\{J^{[\alpha]-\alpha} g(x)\} \end{aligned}$$

$$\text{De 2.3.2:} \quad \mathcal{L}\{J^{[\alpha]-\alpha} g(x)\} = s^{-(\alpha-[\alpha])} G(s)$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(x)\} = \mathcal{L}\{D^{[\alpha]} f(x)\} \quad \text{Sustituyendo con 5.3.2 } \mathcal{L}\{D_*^\alpha f(x)\}:$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D_*^\alpha f(x)\} &= s^{-(\alpha-[\alpha])} \mathcal{L}\{D^{[\alpha]} f(x)\} \\ \therefore \mathcal{L}\{D_*^\alpha f(x)\} &= s^{-(\alpha-[\alpha])} s^{[\alpha]} F(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} s^{[\alpha]-k-1} f^k(0) \\ \therefore \mathcal{L}\{D_*^\alpha f(x)\} &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} s^{[\alpha]-k-1} f^k(0) \end{aligned} \quad .4.3.14$$

Como  $D_*^\alpha f(x) = 0$  para  $x = c$  la transformada de Laplace de una función diferenciada con el operador de Caputo si se puede utilizar para resolver ecuaciones diferenciales [11].

**Conclusión:** Los operadores RL y Caputo no coinciden y por lo tanto dan resultados diferentes para el mismo problema.

Tanto el operador de Caputo como el operador de Riemann-Liouville satisfacen la propiedad de linealidad. Pero en comparación con los operadores de orden entero, ambos operadores no satisfacen las siguientes propiedades para  $\alpha \in \mathbb{R}$  [34]:

- $D_a^\alpha(1) = 0$  (la definición de Caputo si satisface esta condición)
- Para dos funciones  $f$  y  $g$ :

$$D_a^\alpha(fg) = fD_a^\alpha(g) + gD_a^\alpha(f)$$

- Para dos funciones  $f$  y  $g$ :

$$D_a^\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD_a^\alpha(f) - fD_a^\alpha(g)}{g^2}$$

$$D_a^\alpha(f \circ g)(t) = f^{(\alpha)}(g(t))g^{(\alpha)}(t)$$

Se asume que  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables

- $D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f$

De acuerdo con la discusión anterior, se puede introducir un nuevo operador que es de orden fraccionario, pero cumple con las anteriores condiciones eliminando la no-localidad. Este operador resulta naturalmente de la expresión  $\frac{df}{dt}$  es la derivada de  $f$  en  $t$  y es igual a  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(t)}{\epsilon}$  donde la derivada de orden  $n \in \mathbb{N}$  es  $\frac{d^n f}{dt^n} = nt^{n-1}$  [34].

Definición: Derivador fraccional conformable: Para  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la derivada de orden  $\alpha \in \mathbb{R}$  es definida como  $T_\alpha$  [34]:

Para todo  $t > 0$ .

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} \quad .4.3.15$$

Definición: Integrador fraccional conformable: Sea  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  y  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha \neq p$  para  $f(t) = t^p$ ,

$$J_\alpha(t^p) = \frac{t^{p+\alpha}}{p+\alpha}.$$

Usando el teorema de Bolzano-Weierstrass se puede ver que para [35]:

$$f(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k \rightarrow J_\alpha(f) = \sum_{k=0}^n b_k J_\alpha(t^k) = \sum_{k=0}^n b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$$

Igualmente, si:  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$  es convergente entonces:

$$J_{\alpha}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$$

Esta definición nos lleva a que se la definición de la integral del operador conformable sea (para un terminal  $a \geq 1$  [35] [34]:

$$I_a^{\alpha}(f)(t) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} \cdot dx \quad .4.3.16$$

#### 4.4. Filtro Oustaloup

Propuestos por A. Oustaloup, estos filtros de carácter recursivo permiten obtener una aproximación de los operadores fraccionarios para un rango de frecuencia  $(\omega_b, \omega_h)$  y orden  $N$ . El filtro Oustaloup para la función de potencia fraccionaria  $s^{\gamma}$  para  $0 < \gamma < 1$  esta dada por [21]:

$$G_f(s) = K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad .4.4.1$$

Donde  $\omega'_k$ ,  $\omega_k$ ,  $K$  son obtenidos por [21]:

$$\omega'_k = \omega_b \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+0.5(1-\gamma)}{2N+1}} \quad .4.4.2$$

$$\omega_k = \omega_b \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+0.5(1+\gamma)}{2N+1}} \quad .4.4.3$$

$$K = \omega_h^{\gamma} \quad .4.4.4$$

## 5. Sistemas Dinámicos de Orden Fraccionario

Por lo general, un sistema dinámico de orden fraccionario puede ser descrito de la siguiente manera, donde  $y(t)$  es la función de entrada y  $u(t)$  es la función de salida [3]:

$$a_n \mathcal{D}^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 \mathcal{D}^{\alpha_0} y(t) = b_m \mathcal{D}^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} \mathcal{D}^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 \mathcal{D}^{\beta_0} u(t)$$

Existe un caso especial en el cual el sistema se denomina como conmensurada:  $\alpha_n, \beta_m = k\gamma$ . Esto permite la descripción [3]:

$$\sum_{k=0}^n a_n \mathcal{D}^{k\gamma} y(t) = \sum_{k=0}^m b_m \mathcal{D}^{k\gamma} u(t) \quad .5.1$$

Aplicando la transformada de Laplace (3) se puede obtener la función de transferencia  $G(s)$  para un sistema de orden fraccionario para el caso no-conmensurado [21]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\therefore G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{\beta_k}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{\alpha_k}} \quad .5.2$$

Para el sistema conmensurado se toma  $\lambda = s^\gamma$ , se obtiene una función de transferencia pseudo-racional  $H(\lambda)$  [21]:

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k} \quad .5.3$$

A partir de  $H(\lambda)$  el sistema dinámico puede tener la representación en espacio de estados [21]:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}^\gamma x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{bmatrix}$$

Desde la matriz de espacio de estados para el sistema de orden fraccionario en el caso conmensurado, se puede hacer una generalización del criterio de estabilidad de la colocación de polos, llamado el criterio de estabilidad de Matignon [21]:

$$\left| \arg(\text{eig}(H(\lambda))) \right| > q \frac{\pi}{2} \quad .5.4$$

Donde  $0 < q < 1$  y  $\text{eig}(H(\lambda))$  son los valores propios de la matriz  $H$ . Gráficamente, la región estable puede ser extendida en función del  $q \frac{\pi}{2}$ .

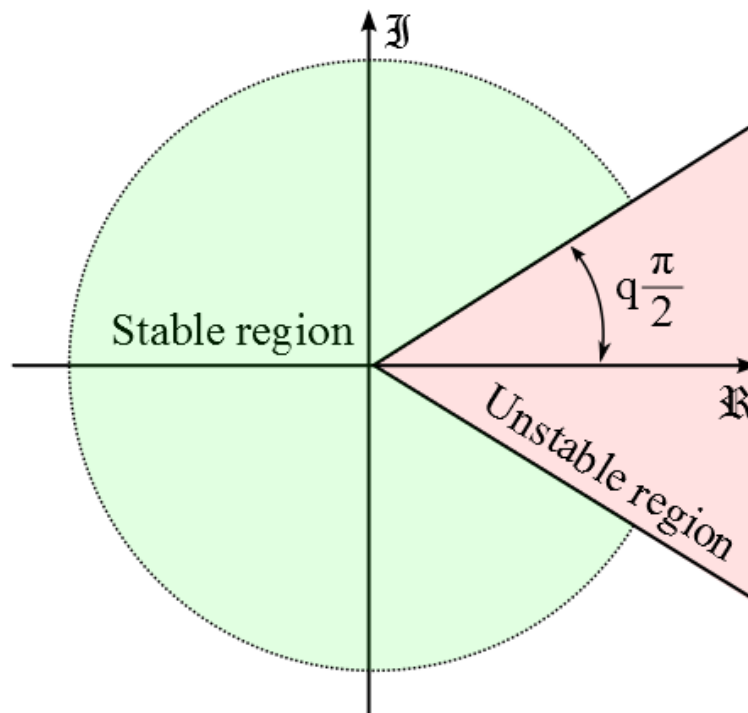


Ilustración 42: División de regiones del plano complejo según la estabilidad para un sistema de orden fraccionario [21]

## 6. Control PID Fraccionario

Los indicios del control fraccionario surgieron con la iniciativa de Bode de diseñar un sistema de lazo cerrado cuyo desempeño no se vea afectada por la ganancia del amplificador de la realimentación, es decir un sistema robusto ante cambios en la ganancia, es propiedad denominada iso-amortiguacion (isodamping). La solución que encontró Bode para este problema es denominada la función ideal de Bode de lazo cerrado (Bode's Ideal Transfer Function). El diagrama de Bode de dicha función de transferencia sería una línea horizontal sin desviaciones indicando que la derivada con respecto a la frecuencia es igual a cero (localmente).

La función de transferencia ideal de Bode ideal está dada por [1]:

$$G(s) = \left(\frac{\omega_{cg}}{s}\right)^\alpha$$

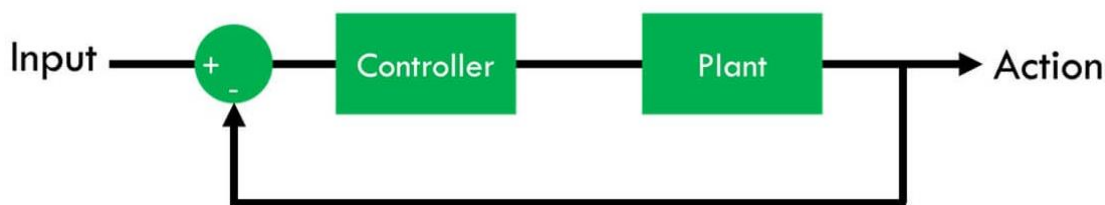
Donde  $\alpha < 0$  y  $\omega_{cg}$  es la frecuencia de corte para la ganancia y el margen de fase esta dado por:

$$\phi_m = \pi - \frac{\alpha\pi}{2}$$

A través de los diagramas de Bode se puede obtener una descripción de la estabilidad del sistema en función de la ganancia y la fase y los márgenes respectivos que tiene para mantenerse en la estabilidad, de ahí que las primeras técnicas de control fraccionario se desarrollan a través de la adaptación de los conceptos de cálculo fraccionario a métodos basados en la respuesta en frecuencia como Bode o Nyquist.

### 6.1. Generalización de las Funciones de Control:

Si se toma el sistema de lazo cerrado en la ilustración:



*Ilustración 43: Sistema controlado y con realimentación de unidad. [36]*

Donde el controlador tiene la función [1]:

$$C(s) = KJ^\alpha \quad \alpha \in [-1, 1]$$



Donde  $J$  es el operador diferintegrador como esta definido en la sección anterior.  $K$  es la ganancia.

#### 6.1.1. Para el Caso $\alpha \in (0, 1]$

Para el caso de  $\alpha$  positivo, tenemos una acción de integración. La acción integral es aquella que hacen que la respuesta sea mas lenta, y reducen la estabilidad relativa y eliminan el error de estado estacionario para entradas a las que el sistema tiene un error cuantificable.

En la sección anterior los efectos de la acción integral se observaron, en el dominio del tiempo como una reducción en el tiempo de subida de la respuesta mientras que, en el dominio complejo, la acción integral representa un desplazamiento de los polos del sistema hacia el lado izquierdo del plano complejo  $s$ . En el dominio de la frecuencia, como es demostrado en los diagramas de Nyquist, una acción integral tiene el efecto de incrementar las pendientes de las curvas de magnitud por  $-20\text{dB/dec}$  y un decremento de  $\pi/2$  rad en la fase.

Al escoger los valores de  $\alpha$  en  $[0,1]$  es necesario tomar en consideración los efectos de la integración. Si la señal de error tiene la forma para  $k \in \mathbb{N}$  (señal onda cuadrada) [1]:

$$e(t) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \mu_0(t - kT)$$

Aplicando la definición de 4.3.10:

$$\therefore \mathcal{L}\{e(t)\} = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{e^{-kTs}}{s} = E(s)$$

Por lo tanto, la acción de control seria:

$$U(s) = C(s) \cdot E(s)$$

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$$

$$\therefore u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{e^{-kTs}}{s^{1-\mu}}\right\}$$

$$= K \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{\Gamma(1-\alpha)} (t - kT)^{-\alpha} \mu_0(t - kT) \quad .6.1.2$$

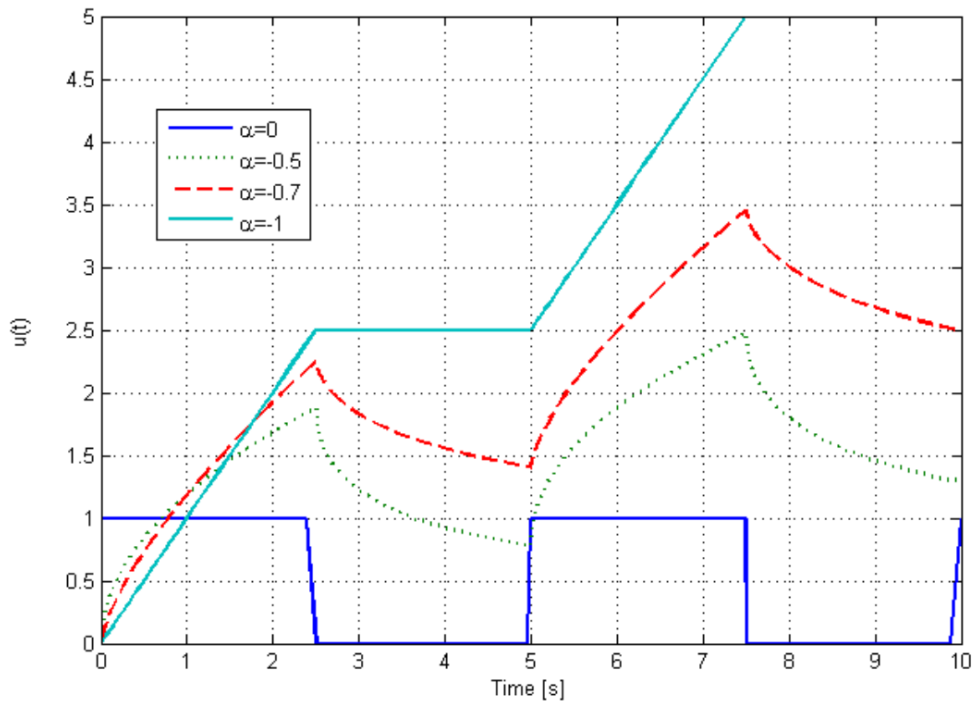


Ilustración 44: evolución de la señal cuadrada para valores de  $\alpha \in 0,1$

### 6.1.3. Para el Caso $\alpha \in (-1, 0]$

La acción derivativa incrementa la estabilidad del sistema mientras que exagera los efectos de ruido de alta frecuencia sobre el mismo como fue explicado en la sección anterior. En el dominio del tiempo el efecto derivativo tiene el efecto de reducir el sobrepaso (overshoot) y tiempo de estabilización. En el plano complejo  $s$  la acción derivativa tiene el efecto de desplazar las raíces hacia el lado izquierdo del plano complejo. En el dominio de la frecuencia la acción derivativa tiene el efecto de adelantar la fase de la señal  $\pi/2$  rad y un incremento de 20dB/dec en las magnitudes de las pendientes de las curvas [1].

La evaluación de la acción derivativa puede apreciarse en el siguiente ejemplo: Para una señal de error trapezoidal [1]:

$$e(t) = tu_0(t) - t(t-T)u_0(t-T) - t(t-2T)u_0(t-2T) + t(t-3T)u_0(t-3T)$$

$$\mathcal{L}\{e(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-Ts}}{s^2} - \frac{e^{-2Ts}}{s^2} + \frac{e^{-3Ts}}{s^2} = E(s)$$

De igual manera que el ejemplo anterior [1]:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$$

$$u(t) = \frac{K}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot (t^{1-\alpha} u_0(t) - t^{1-\alpha} (t-T)^{1-\alpha} u_0(t-T) - (t-T)^{1-\alpha} u_0(t-2T) + (t-T)^{1-\alpha} u_0(t-3T))$$

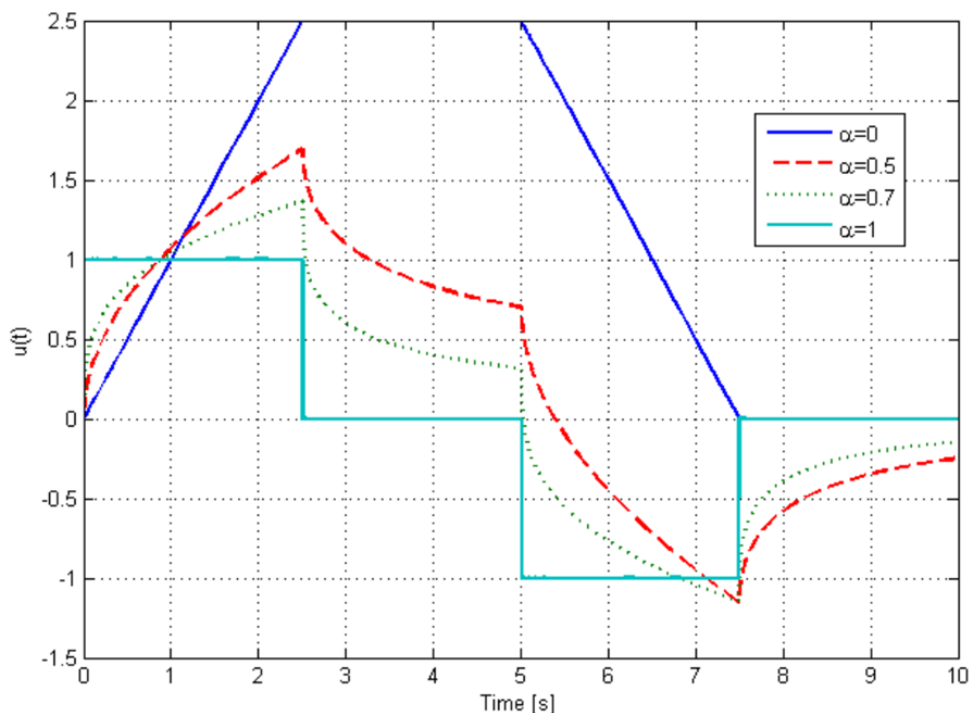


Ilustración 44: Evolución de la señal trapezoidal para valores de  $\alpha \in 0,1$

Los efectos del control derivativo fraccionario varían entre la acción proporcional  $\alpha = 0$ , donde la señal de error de entrada es trapezoidal y derivativa cuando  $\alpha = 1$ . Para los valores intermedios de  $\mu$  la señal de salida de actuación toma la forma de curvas intermedias.

Dominio	Acción Integral	Acción Derivativa
<b>Tiempo</b>	Ralentiza: Tiempo de subida incrementa	Reduce sobrepaso y tiempo de estabilización
<b>Plano <math>s</math> (Laplace)</b>	Desplaza los polos a la izquierda	Desplaza ceros y polos a la izquierda
<b>Frecuencia (Nyquist)</b>	Reduce magnitud por 20dB Reduce fase por $\pi/2$	Incrementa magnitud por 20dB Incrementa fase por $\pi/2$

## 7. PID de Orden Fraccionario

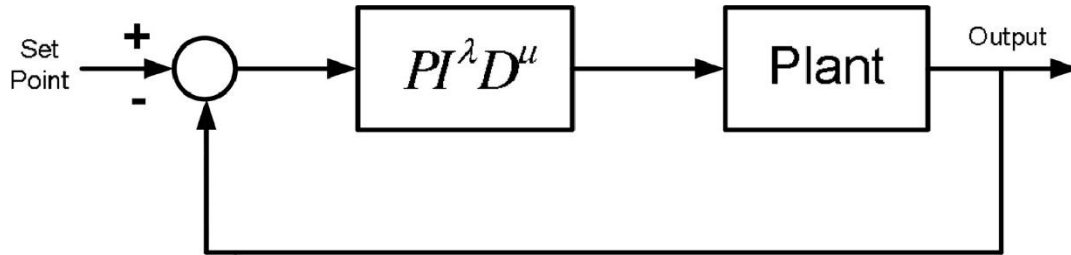


Ilustración 45: Sistema con control PID fraccionario. [39]

Al igual que el controlador PID de orden entero, el PID fraccionario consiste en tres módulos (proporcional, integral, derivador) con tres ganancias respectivamente para cada uno. Adicionalmente, a los módulos integral y diferencial aparecen dos parámetros adicionales: el exponente fraccionario del control derivativo  $\lambda$  y el exponente fraccionario del control integral  $\mu$  [1]:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \mathcal{D}^{-\lambda} e(t) + K_d \mathcal{D}^{\mu} e(t) \quad .7.1$$

$$\therefore \mathcal{L}\{u(t)\} = K_p + \frac{K_i}{s^{\lambda}} + K_d s^{\mu} = C(s) \quad .7.2$$

$$\therefore C(s) = k \frac{(s/\omega_f)^{\lambda+\mu} + s\delta_f s^{\lambda}/\omega_f + 1}{s^{\lambda}}$$

El control permite escoger la pendiente para los diagramas de Bode tanto para la ganancia como para las contribuciones de fase tanto para las frecuencias altas como las bajas. De forma gráfica, las posibilidades de control mediante un PID de orden fraccionario controlador se pueden apreciar extendiendo los cuatro puntos de control del PID clásico al rango de puntos de control del cuarto de plano definido por seleccionando los valores de  $\lambda$  y  $\mu$ . [1]

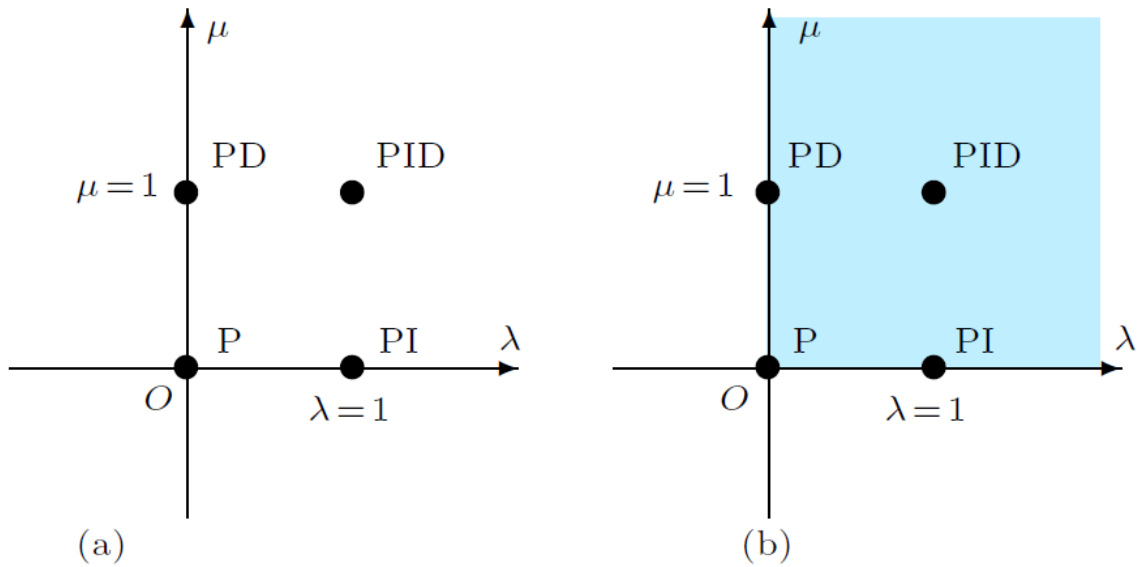


Ilustración 46: De punto a plano, el rango del PID vs PID fraccionario [1]

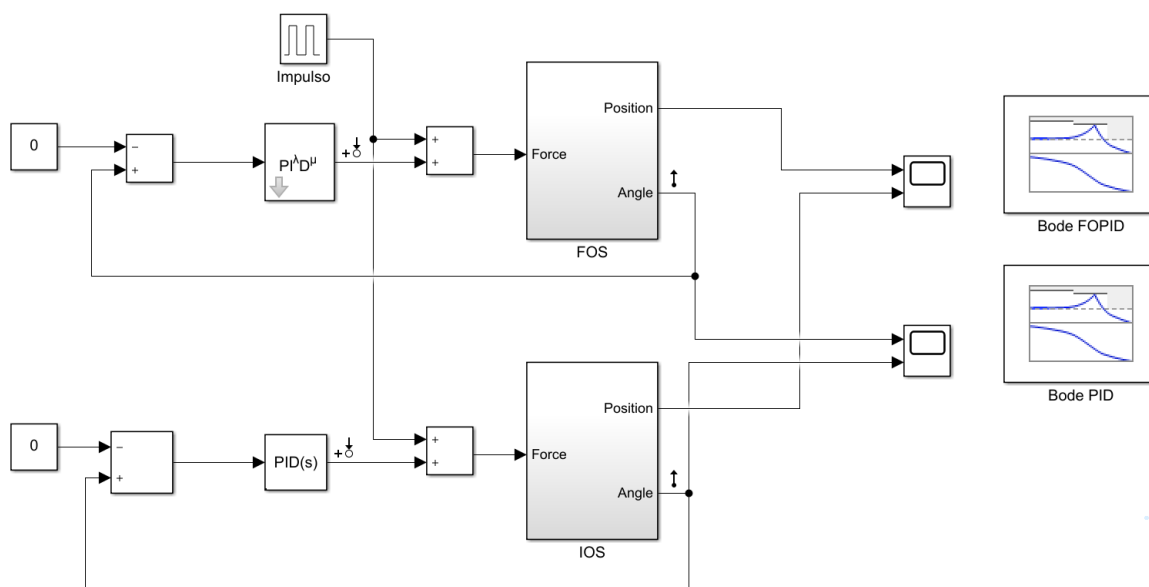
En conclusión, los parámetros de ganancia como los exponenciales fraccionarios permiten la modificación de la arquitectura del controlador cuyo efecto se puede resumir en la siguiente tabla:

Parámetro / Tipo de control	$\lambda$	$\mu$
IOPI	1	0
IOPID	1	1
FOPI	(0,1)	0
FOPID	(0,1)	(0,1)

## 8. Sintonización y Desempeño

Como la sintonización consiste encontrar valores determinados para un grupo de variables dependientes entre si, se podría decir que la sintonización consiste de una optimización. La optimización es la tarea de encontrar la mejores condiciones admisibles, que satisfacen un conjunto de restricciones, para lograr un objetivo. Por lo general, los problemas de optimización del tipo del cuales se requiere solucionar para encontrar las coeficientes del control fraccionario se logra a través de una sintonización por minimización. Las soluciones pueden ser halladas manera global (sobre todo el dominio de la función, encontrando las mejores condiciones posibles) con métodos computacionales. A pesar de que una solución global es deseable en la mayoría de los casos una solución global para el problema de optimización no es esencial ya que desde una perspectiva práctica cualquier solución que cumple con las condiciones de una manera relativamente efectiva, es una solución bastante útil en comparación con el caso no optimizado. Otra consideración importante es que para algunos problemas de optimización no existe una garantía que la función de optimización retorne un mínimo global, al menos de que este mínimo sea el único mínimo de la función y la función optimizada es continua. [1]

En esta tesis, se utiliza el método de prueba y error con el fin de demostrar la superioridad del control PID fraccionario sobre el control PID de orden entero y adicionalmente con este método demostrar el efecto de los coeficientes  $\mu$  y  $\lambda$  sobre el desempeño del sistema, manteniendo los valores de las ganancias  $K_p, K_i, K_d$  iguales a los valores hallados en la sección anterior, para los dos controles. El sistema del péndulo invertido se monta en Simulink en la siguiente ilustración:



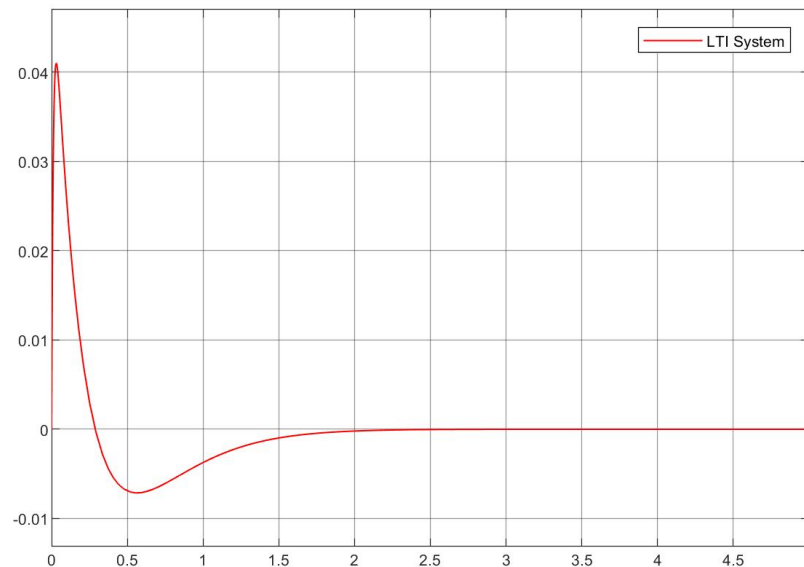
*Ilustración 47: Diagrama del sistema en Simulink muestra dos péndulos conectados en paralelo a una entrada impulso y control PID y PID fraccionario respectivamente.*

La ilustración muestra los dos sistemas conectados en paralelo a una misma entrada tipo escalón lo cual asegura la igualdad de condiciones para ambos sistemas que tiene las siguientes especificaciones:

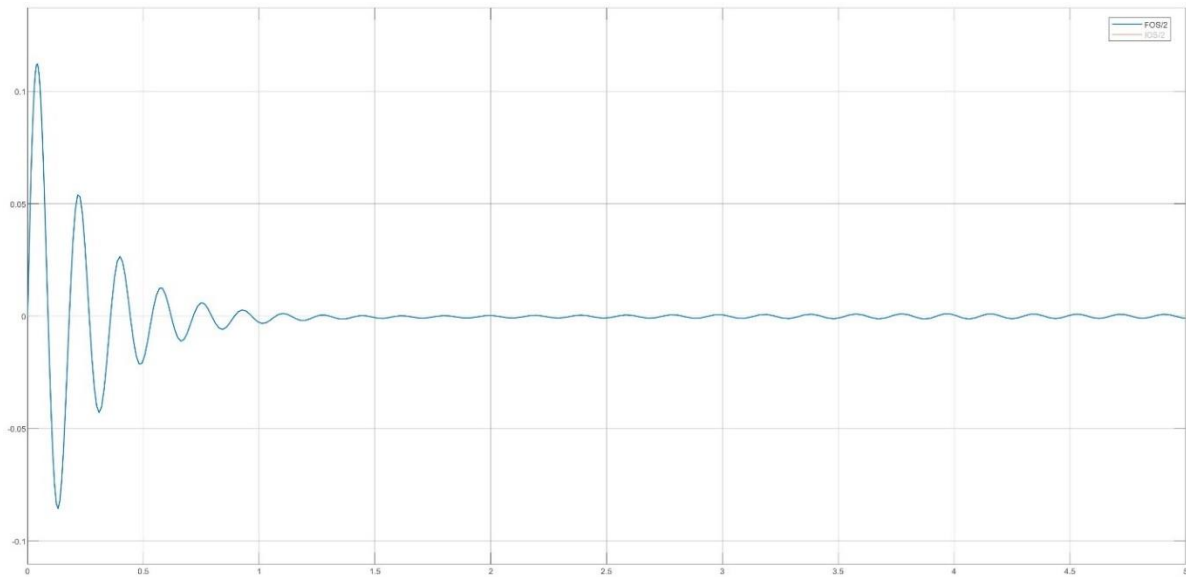
- Amplitud igual a 1000.
- Periodo igual a 10s.
- Ancho de pulso 0.01% del periodo.
- Retraso de fase nulo.

Además, se agrega una perturbación de entrada a la señal de actuación (control) y una sonda de salida sobre la posición angular del péndulo del sistema controlado por el PID y el PID fraccionario para hallar los parámetros para la linealización del sistema y hallar los diagramas de Bode. El bloque del diagrama de control PID fraccionario es parte del toolbox de FOMCON para MATLAB.

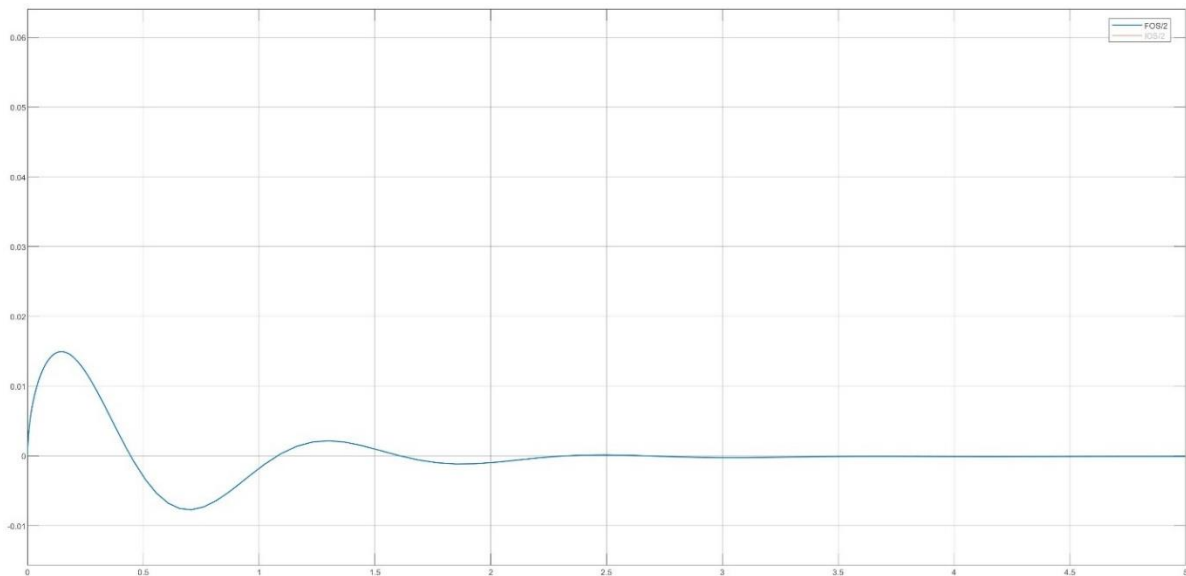
Empezando con  $\lambda, \mu = 1$ , se obtiene un control PID de orden entero:



Modificando el valor de  $\lambda$  y  $\mu$  a 0.5 se obtiene la siguiente respuesta:

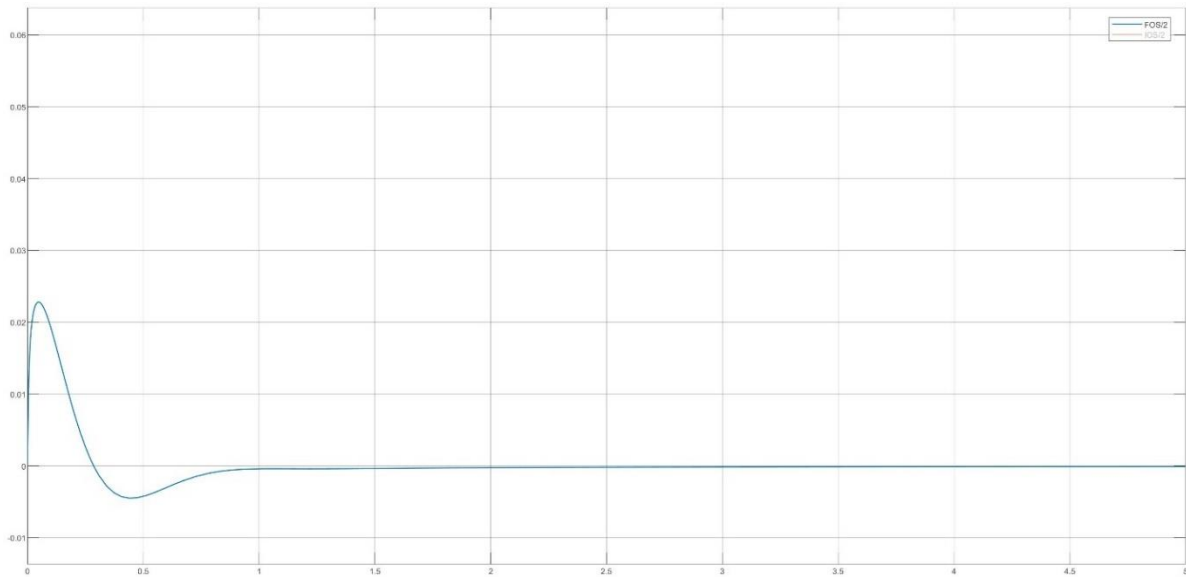


Se observa que el tiempo de estabilización se reduce, pero el tiempo de subida se incrementa y el sobre paso se incrementa en varios órdenes de magnitud. Reduciendo  $\lambda$  a 0.35 e incrementando  $\mu$  a 1.5 se observa la siguiente respuesta:



Se observa en la ilustración que el sobrepaso se redujo a un nivel satisfactorio, pero el tiempo de estabilización es aproximadamente igual al control de orden entero debido a un movimiento oscilatorio causado por una sobrecompensación de la acción integral. Se puede reducir la acción derivativa a  $\mu = 1.1$  para obtener la respuesta:



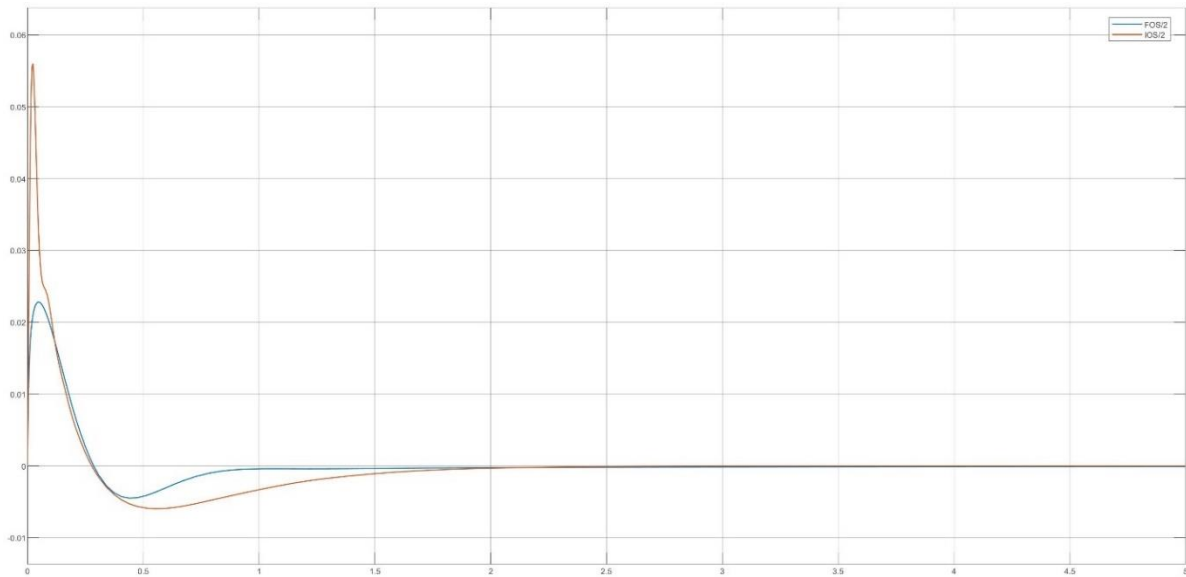


Cuya función de transferencia es igual a:

$$C(s) = \frac{260 + 21s^{1.1} + 150s^{0.35}}{s^{0.35}} \quad .8.1$$

$$\therefore G(s) = \frac{0.00021945s^{2.1} + 0.002717s^{0.65} + 0.0015675s}{2.3 \times 10^{-6}s^3 + 4.182 \times 10^{-7}s^2 - 7.179 \times 10^{-5}s - 1.026 \times 10^{-5}}$$

La respuesta obtenida es satisfactoria en todas las categorías. Comparando con la respuesta del control de orden entero se puede observar:



En la siguiente tabla, se compara el desempeño de ambos controladores:

Parámetro	IOPID	FOPID
<b>Sobrepaso</b>	$5.959 \times 10^{-3}$	$4.497 \times 10^{-3}$
<b>Tiempo de estabilización (<math>T_s</math>)</b>	$\sim 2.056$ s	$\sim 1.761$ s
<b>Tiempo de subida (<math>T_r</math>)</b>	$\sim 203.26$ ms	$\sim 202.820$ ms

Los resultados demuestran que en todos los ámbitos el control fraccionario es superior al control de orden enteros si es correctamente sintonizado.

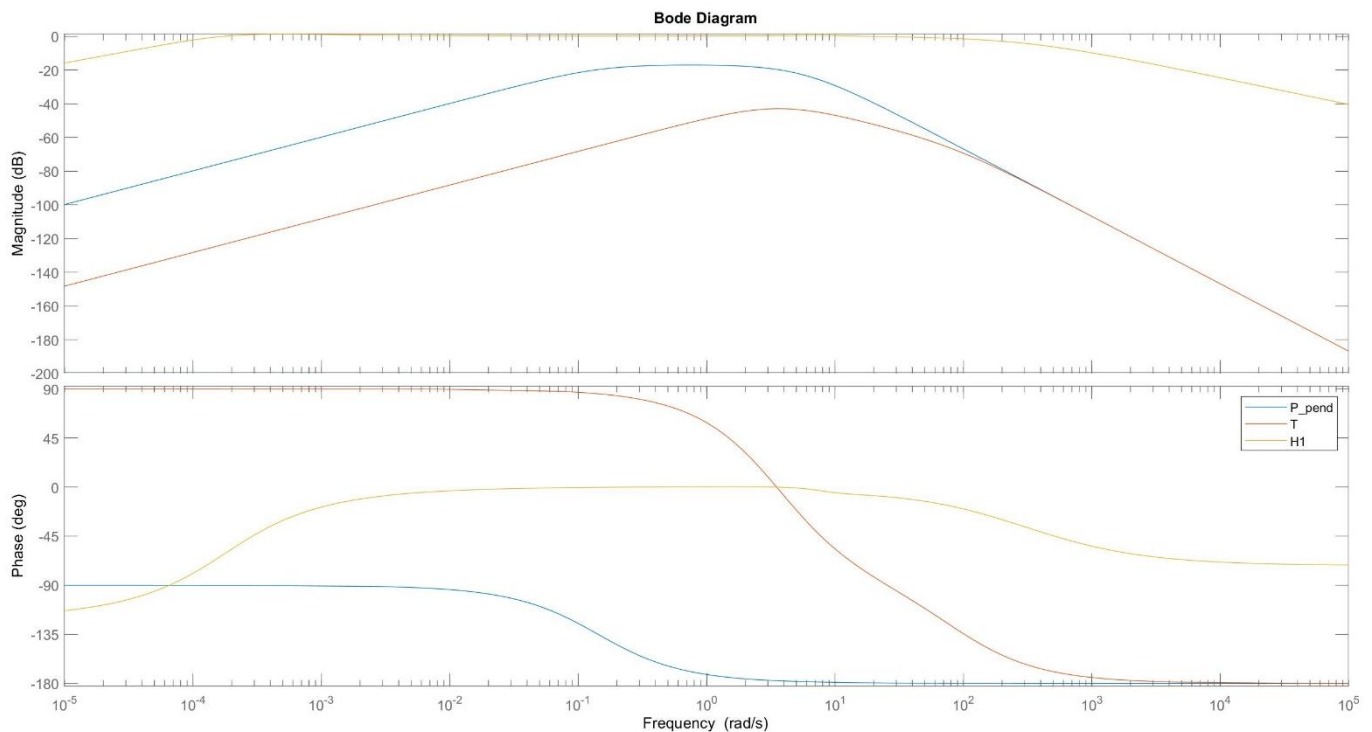
Se puede resumir los efectos de incrementar las variables  $\mu$  y  $\lambda$  en la siguiente tabla:

Parámetro	Tiempo de subida ( $T_r$ )	Sobrepaso	Tiempo de estabilización ( $T_s$ )
$\lambda$	Decrece	Crece	Crece
$\mu$	Decrece	Decrece	Decrece

## 9. Análisis de Estabilidad

La estabilidad de un control de orden fraccionario se evalúa en la superficie de Riemann, la cual en este caso sirve como una generalización del plano de Laplace. Sobre la superficie de Riemann el criterio de Matignon se encarga de delimitar la región estable del sistema según sus características. En esta tesis la comparación se hace de una manera directa entre los dos controles usando diagramas de Bode y diagrama de polos (root locus) luego de aplicar un filtro Oustaloup.

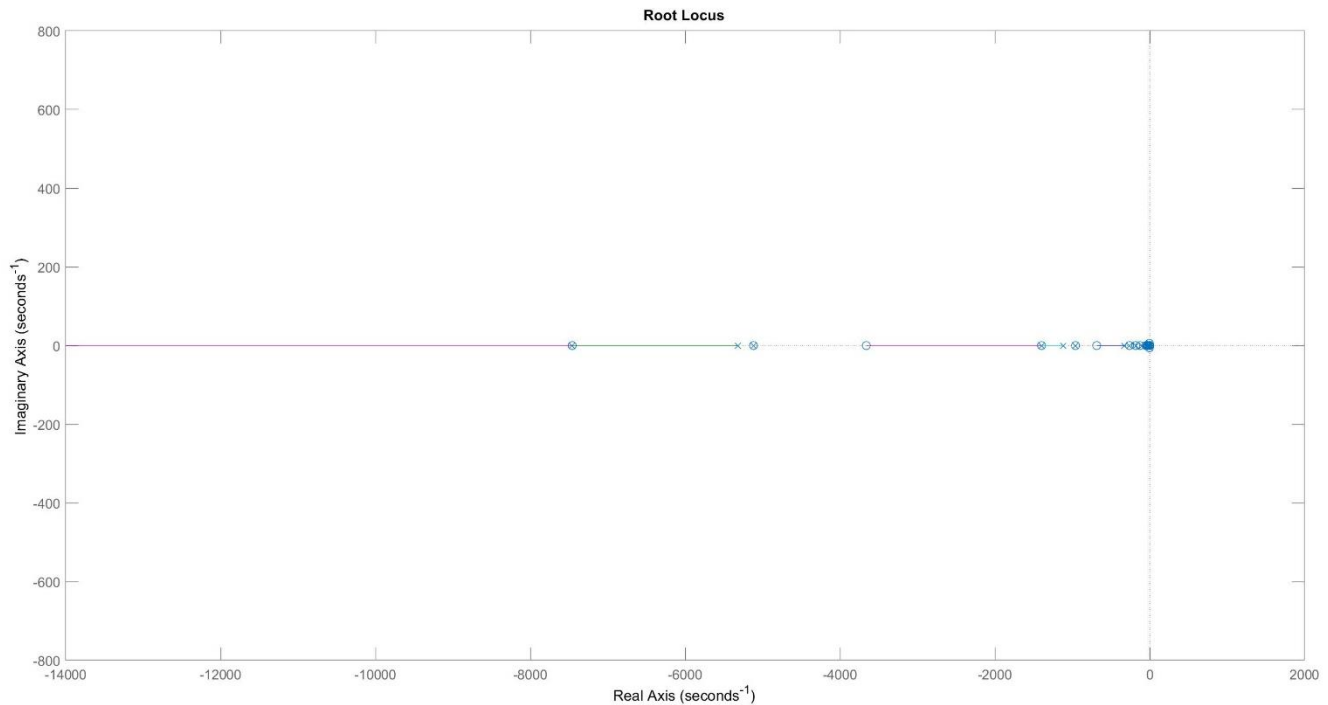
Se puede observar en la siguiente ilustración los diagramas de Bode correspondientes a al sistema sin compensación en lazo abierto (azul), el sistema compensado con el control PID clásico (rojo), y finalmente en el color amarillo el sistema compensado con PID de orden fraccionario:



*Ilustración 48: Comparación de la respuesta en frecuencia entre el sistema no compensado y el sistema compensado con PID clásico y PID fraccionario*

La ilustración demuestra que el sistema compensado con el PID de orden fraccionario goza de la propiedad de la iso-amortiguacion en un intervalo de frecuencias amplio desde  $\omega \approx 10^3$  rad/s hasta  $\omega \approx 50$  rad/s.

Usando un filtro de Oustaloup de 4.4.1 de orden  $N = 5$ , con frecuencias de corte  $\omega_b = 0.0001 \text{ rad/s}$  hasta  $\omega_h = 10000 \text{ rad/s}$  se puede obtener una función de transferencia cuyo comportamiento es similar a la de la función de transferencia dentro de las frecuencias de corte. Podemos comprobar que la función es completamente estable con algunas ganancias causando respuesta oscilatoria como se puede apreciar en la figura:



*Ilustración 49: Diagrama Root Locus del sistema pasado por un filtro Oustaloup de orden  $N=5$*

## 10. Conclusiones

El sistema del péndulo invertido es un sistema cuyas propiedades dinámicas dificultan la tarea de controlarlo efectivamente. No obstante, es posible ejercer control sobre el sistema de tal manera que pueda permanecer en equilibrio frente a diferentes tipos de entradas siempre y cuando el control logre mantener el sistema dentro de las condiciones de linealización.

El control efectivo del péndulo invertido se puede lograr para mantener el péndulo en equilibrio utilizando un control PID de orden entero sintonizado de acuerdo con los parámetros del sistema y a las especificaciones y criterio de desempeño que se quieren lograr, esta sintonización requiere de la solución de unas ecuaciones diferenciales de segundo orden para los parámetros del sistema. El tipo de control es un control tipo regulador en el cual la variable de referencia es el único punto de equilibrio.

Con el objetivo de mejorar el desempeño del sistema, se utiliza un control FOPID que tiene ecuaciones de orden fraccionario, agregando más flexibilidad para la sintonización del controlador lo cual permite aumentar la calidad del control en varios criterios, principalmente la robustez ante perturbaciones. El control de orden fraccionario a la vez agrega un nivel de complejidad, ya que al ser de orden fraccionario sus ecuaciones no tienen una solución analítica la cual ha sido la razón principal por la cual no gozan de la misma ubiquidad que los controles de orden entero, aunque recientemente, se han desarrollado métodos numéricos que se basan en hacer aproximaciones de las ecuaciones de orden fraccionario a unas de orden entero permitiendo más uso de este tipo de controladores.

En esta tesis se hizo un estudio detallado del sistema del péndulo invertido y sus propiedades dinámicas las cuales llevan a la linealización del sistema para poder ejercerle un control. Posteriormente a la linealización, se logra aplicar un control PID al sistema sintonizando las ganancias de los diferentes componentes utilizando el método de colocación de polos. Luego, se introduce el control fraccionario al sistema, utilizando las mismas ganancias que el sistema y se hace una sintonización a prueba y error usando Simulink en Matlab a través del cual se demostró sin una sintonización rigurosa la superioridad del control fraccionario frente al de orden entero tanto para los criterios de control como de estabilidad. Un trabajo a futuro consistirá en la utilización de las diversas técnicas de cálculo fraccionario para hallar los coeficientes de estabilidad de una manera más rigurosa cumpliendo más especificaciones de control y estabilidad.

Fin.

## 11. Referencias

- [1] C. Monje, *Fractional-Order Systems and Controls*, Springer, 2010.
- [2] M. Caputo, «Linear Models Whose Q Value is Almost Independent,» *Annals of Geophysics*, nº 19(4), 31 May 1966.
- [3] I. Podlubny, I. Dorcak y I. Kostial, «Fractional-Order Systems and Fractional-Order Controllers,» de *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, 1997.
- [4] W. Liao, Z. Liu, S. Wen, S. Bi y D. Wang, «Fractional PID based stability control for a single link rotary inverted pendulum,» de *2015 International Conference on Advanced Mechatronic Systems (ICAMechS)*, Beijing, 2015.
- [5] M. El-Hossainy y B. Abo-Zalam, «Fractional Order Modeling and Control for Under-Actuated Inverted Pendulum,» *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 74, nº 30, July 2019, pp. 97-121, 2019.
- [6] S. K. Mishra y D. Chandra, «Stabilization and Tracking Control of Inverted Pendulum Using Fractional Order PID Controllers,» *Journal of Engineering*, vol. 2014, 2014.
- [7] O. D. Montoya Giraldo, C. A. Ramirez Vanegas y L. F. Grisales Noreña, «Control Global del Pendulo con Rueda de Reaccion Empleando Redes Neuronales Artificiales y Linealizacion Extendida,» *Scientia et Technica*, vol. 22, nº 2, 2017.
- [8] W. Busza, «RES.8-005 Vibrations and Waves Problem Solving.,» Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu>, 2012.
- [9] G. Sanderson, «Taylor series | Essence of calculus, chapter 11,» 7 May 2017. [En línea]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=3d6DsJlBzJ4&vl=en>. [Último acceso: August 2020].
- [10] E. W. Weisstein, «Laplace Transform,» Wolfram Research, Inc, [En línea]. Available: <https://mathworld.wolfram.com/LaplaceTransform.html>. [Último acceso: August 2020].
- [11] M. K. Ishteva, «Properties and Applications of the Caputo Fractional Derivative,» February 2005. [En línea]. Available: [http://homepages.vub.ac.be/~mishteva/papers/Ishteva\\_MScThesis.pdf](http://homepages.vub.ac.be/~mishteva/papers/Ishteva_MScThesis.pdf). [Último acceso: July 2020].
- [12] The MathWorks, Inc., «Simulate the Motion of the Periodic Swing of a Pendulum,» The MathWorks, Inc., 2020. [En línea]. Available: <https://www.mathworks.com/help/symbolic/examples/simulate-physics-pendulum-swing.html>. [Último acceso: August 2020].

- [13] KSSV, «SimplePendulum,» 3 October 2011. [En línea]. Available: [https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33082-simplependulum?s\\_tid=srchtitle](https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33082-simplependulum?s_tid=srchtitle). [Último acceso: August 2020].
- [14] M. P. Kelly, «Cart-Pole Dynamics,» June 2015. [En línea]. Available: <http://www.matthewpeterkelly.com/tutorials/cartPole/index.html>. [Último acceso: August 2020].
- [15] C. D. Green, «Equations of Motion for the Cart and Pole Control Task,» SharpNeat, 4 January 2020. [En línea]. Available: <https://sharpneat.sourceforge.io/research/cart-pole/cart-pole-equations.html>. [Último acceso: August 2020].
- [16] B. Coller, «The Inverted Pendulum,» March 2018. [En línea]. Available: <http://www.spumone.org/courses/control-notes/inverted-pendulum/>. [Último acceso: July 2020].
- [17] B. Messner y D. Tilbury , «Inverted Pendulum: System Modeling,» 2011. [En línea]. Available: <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling>. [Último acceso: August 2020].
- [18] «How to find the transfer function of a system,» [En línea]. Available: [https://x-engineer.org/graduate-engineering/signals-systems/control-systems/find-transfer-function-system/#:~:text=The%20transfer%20function%20defines%20the,and%20input%20U\(s\)..](https://x-engineer.org/graduate-engineering/signals-systems/control-systems/find-transfer-function-system/#:~:text=The%20transfer%20function%20defines%20the,and%20input%20U(s)..) [Último acceso: August 2020].
- [19] K. Ogata, Modern Control Engineering, Pearson, 2010.
- [20] A. Kamble, «How stability is dependent on location of poles in the characteristic equation of control systems?,» 2015 October 2015. [En línea]. Available: <https://qr.ae/pN2abD>. [Último acceso: August 2020].
- [21] A. Tepljakov, «FOMCON Fractional Order Modeling and Control,» [En línea]. Available: <https://fomcon.net/fo/fractional-order-modeling/>. [Último acceso: August 2020].
- [22] B. Douglas, «Understanding PID Control,» The Mathworks, Inc, 1 August 2018. [En línea]. Available: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLn8PRpmsu08pQBgjxYFXSsODEF3Jqmm-y>. [Último acceso: August 2020].
- [23] A. Kumar, «Control System-Definition, Working Diagram, Examples, PDF,» [En línea]. Available: <https://learnmechanical.com/control-system/>. [Último acceso: August 2020].
- [24] Krishnavedala, «File:PI controller.svg,» 27 November 2014. [En línea]. Available: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PI\\_controller.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PI_controller.svg). [Último acceso: August 2020].
- [25] B. Douglas, «The Root Locus Method,» 14 June 2014. [En línea]. Available: <youtube.com/playlist?list=PLUMWjy5jgHK3-ca6GP6PL0AgcNGHqn33f>. [Último acceso: 16 August 2020].

- [26] R0uge, «File:Effect of Pole Location in a Root Locus Plot.PNG,» 2 5 2015. [En línea]. Available: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Effect\\_of\\_Pole\\_Location\\_in\\_a\\_Root\\_Locus\\_Plot.PNG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Effect_of_Pole_Location_in_a_Root_Locus_Plot.PNG). [Último acceso: August 2020].
- [27] MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING, «Understanding Poles and Zeros,» [En línea]. Available: <https://web.mit.edu/2.14/www/Handouts/PoleZero.pdf>. [Último acceso: August 2020].
- [28] S. S. Kumar, «Design of PID Controller using Root Locus method,» [En línea]. Available: <https://kctaero.files.wordpress.com/2016/07/design-of-pid-controller.pdf>. [Último acceso: August 2020].
- [29] «Chegg Study,» Chegg Study, [En línea]. Available: <https://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/find-slope-tangent-line-sine-function-origin-y-sin-x-1-y-sin-2x-2h-compare-values-number-c-q28187463>. [Último acceso: August 2020].
- [30] Cantor's Paradise, «What is Fractional Calculus,» 29 November 2018. [En línea]. Available: <https://medium.com/cantors-paradise/fractional-calculus-48192f4e9c9f>. [Último acceso: July 2020].
- [31] P. Davis, Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function, American Mathematical Monthly, 1959.
- [32] V. Bityutskov, «The Beta Function,» October 2014. [En línea]. Available: <http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Beta-function&oldid=33763>. [Último acceso: August 2020].
- [33] Let's Learn, Nemo!, «Fractional Caclulus,» 2019. [En línea]. Available: [https://www.youtube.com/playlist?list=PLW1\\_9UnhaSkF4eYm-KMkTDxQfFyvF3W5e](https://www.youtube.com/playlist?list=PLW1_9UnhaSkF4eYm-KMkTDxQfFyvF3W5e). [Último acceso: August 2020].
- [34] R. Khalil, «A new definition of fractional derivative,» *Journal of Computational and Applied Mathematics*, n° 264, pp. 65-70, 2014.
- [35] K. L.D., «Bolzano-Weierstrass theorem,» *Encyclopedia of Mathematics*, n° 127, 2011.
- [36] Electrical Engineering XYZ, «Top 10 Examples of Closed Loop Control Systems [Practical Applications],» [En línea]. Available: <https://www.electricalengineering.xyz/article/top-10-examples-of-closed-loop-control-systems-practical-applications/>. [Último acceso: August 2020].
- [37] R. Nave, «Rod Pendulum,» [En línea]. Available: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/penrod.html>. [Último acceso: August 2020].
- [38] A. Urquizo, «PID Controller Overview,» 10 December 2011. [En línea]. Available: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:PID.svg>. [Último acceso: August 2020].



[39] P. Shah y S. Agashe, «Review of Fractional PID Controller,» *Mechatronics*, vol. 38, n° September 2016, pp. 29-41, 2016.

Figura 1: Respuesta en el dominio del tiempo.

